ECUACIONES DIFERENCIALES



ECUACIONES DIFERENCIALES

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN Y PRIMER GRADO

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN DOS Y MAYOR QUE DOS

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

MOSHERA EDITORIAL

CARLOS VERA G.
MOISÉS LÁZARO C.

ECUACIONES DIFERENCIALES

- ECUACIONES DIFERENCIALES
- ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN Y PRIMER GRADO
- ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN DOS Y MAYOR QUE DOS
- APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

CARLOS VERA GUTIÉRREZ
MOISÉS LÁZARO CARRIÓN



La presentación y disposición en conjunto de:

ECUACIONES DIFERENCIALES

Autores: Carlos Vera Gutiérrez
Moisés Lázaro Carrión

Decreto Legislativo .... : 822
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° .... : 2010-04431
International Standard Book Number ISBN N° .... : 978-9972-813-63-4

Primera edición: Abril 2010
Primera reimpresión: Febrero 2014
Segunda reimpresión: Febrero 2017
Tiraje: 1000 ejemplares.

Obra editada, impresa y distribuida por:

Distribuidora, Imprenta, Editorial, Librería
MOSHERA S.R.L.
RUC: 20101220584
Jr. Tacna 2969 - Lima 31
Telefax : 567-9299
e-mail: editorialmoshera@hotmail.com

Impreso en el Perú - Printed in Perú

Agradecemos a las autoridades de la
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA
DEL PERÚ, por habernos dado la oportunidad
de hacer cátedra en sus aulas universitarias.

PRÓLOGO

Después de algunos años de experiencia en el dictado, del curso de ecuaciones ordinarias, nivel básico, ha sido posible mejorar, luego de sucesivas revisiones y ampliaciones, para presentar el libro como texto de consulta.

Cada capítulo, está hecho en forma ordenada y descrita en forma muy didáctica de fácil y versátil lectura que ayudará a entender, cada tema, al lector interesado.

Cada tema ha sido reforzado con diversas aplicaciones que hoy día necesitan los estudiantes de Ciencia e Ingeniería.

El capítulo 1, es una breve presentación de las ecuaciones diferenciales, partiendo del concepto de la derivada de una función continua que depende de una sola variable.

El capítulo 2, se refiere a las ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado, aquí se desarrolla desde la definición hasta los métodos de resolución de las ecuaciones con variables separables, ecuaciones diferenciales exactas, homogéneas y Bernoulli.

El capítulo 3, trata de las ecuaciones diferenciales lineales, de orden uno, orden dos y orden superior. Al término del capítulo se agregan aplicaciones a la economía.

El capítulo 4, trata exclusivamente de las diversas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales: aplicaciones a la economía, aplicaciones a los circuitos lógicos, aplicaciones a trayectorias ortogonales, modelos de crecimiento poblacional, decaimiento radioactivo, modelos de crecimiento poblacional, la ecuación logística y ley de enfriamiento de Newton.

Estamos seguros que el libro será una buena ayuda para el aprendizaje de cualquier lector que se interese por las ecuaciones diferenciales.

Los autores.

ÍNDICE

CAPÍTULO 4

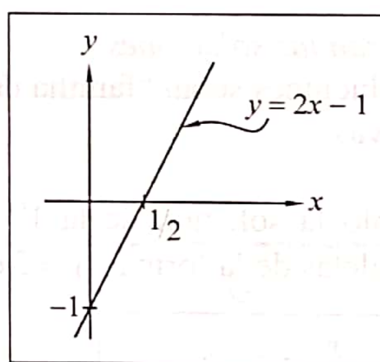
CAPÍTULO 1 ECUACIONES DIFERENCIALES

1.0 INTRODUCCIÓN

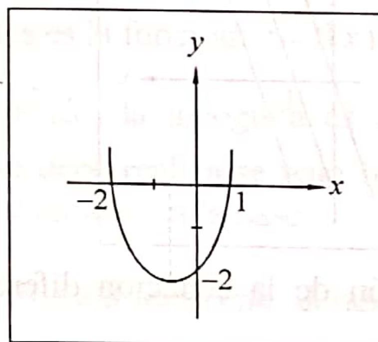
Demos, en primer lugar, una idea útil antes de estudiar el tema en cuestión.

A manera de ejemplos, veamos algunas ecuaciones *y* sus respectivas soluciones.

a) Al resolver la ecuación $2x-1=0$, obtenemos como solución el número real $x=\frac{1}{2}$ y cuya representación gráfica indica que la recta $y=2x-1$ corta al eje *X* en el punto $x=\frac{1}{2}$.

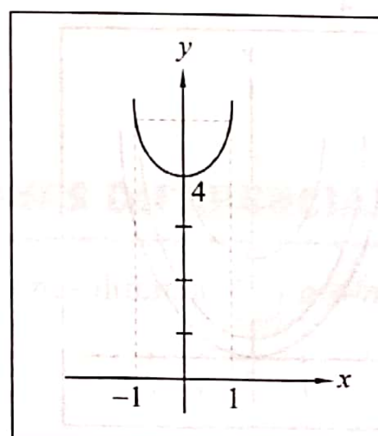


b) Al resolver la ecuación $x^2+x-2=0$, obtenemos como solución los números reales $x=1$ y $x=-2$. En el gráfico indica que la parábola $y=x^2+x-2$ corta al eje *X* en los puntos $x=1$, $x=-2$.



c) Al resolver la ecuación $x^2+4=0$, obtenemos como solución los números complejos $x=2i$ y $x=-2\,i$ siendo $i=\sqrt{-1}$.

En el gráfico indica que la parábola $y=x^2+4$ no corta al eje *X*.



d) Ahora escribamos las siguientes ecuaciones:

1) $dy = 3\,dx$ 2) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x$

3) $y' = -\frac{x}{y}$ 4) $x\,dx - y\,dy = 0$

5) $y'^{\,2} + y = 0$

¿Qué de particular tienen estas ecuaciones?

Que todas tienen "la derivada de y con respecto a x" o también podemos decir que todas tienen las diferenciales: "dx" y "dy".

¿Cómo se llaman este tipo de ecuaciones?.

Se llaman ECUACIONES DIFERENCIALES

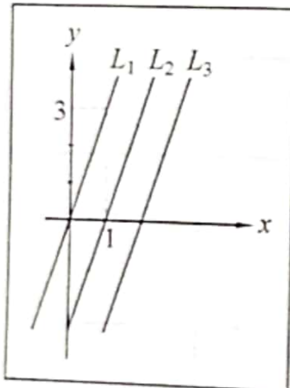
¿Serán las soluciones números reales o números complejos?.

No, ninguna de ellos.

¿Cómo serán las soluciones?

Las soluciones serán "familia de curvas". Es decir serán familia de rectas o familias de curvas.

Por ejemplo la solución de la 1ra ecuación diferencial $dy = 3\,dx$ será una familia de rectas paralelas de la forma: $y = 3x + k$, $k \in I\!R$, que visto en un gráfico es:



La recta L_1 es cuando $k = 0$

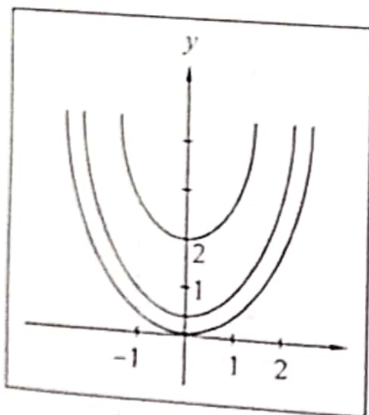
La recta L_2 es cuando $k = 1$

La recta L_3 es cuando $k = 2$

⋮

etc.

La solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x$ es una familia de parábolas de la forma: $y = \frac{1}{4}x^2 + k$



Visto en un gráfico, tenemos las parábolas:

$y = \frac{1}{4}x^2$, si $k = 0$

$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$, si $k = \frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{4}x^2 + 2$, si $k = 2$

Ahora, planteemos la pregunta más difícil:

¿Cómo obtenemos la solución de las ecuaciones diferenciales?
"He aquí el gran problema"

Para resolver una ecuación diferencial se requieren:

a) En primer lugar, saber **INTEGRAR**. Lo cual sugiere conocer "a perfección", sin titubeos, todas las fórmulas elementales de integración *y* los métodos de integración (cálculo integral).

b) En segundo lugar, reconocer los diversos tipos de ecuaciones diferenciales (de variables separables, exactas, homogéneas, lineales, etc.) que se irán estudiando *y* tratando paulatinamente.

1.1 DEFINICIÓN

Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene derivadas de una función desconocida de una o más variables.

Por ejemplo:

1. En la ecuación diferencial $y' - 2x = 0$, la incógnita es la función $y = f(x)$.

2. En la ecuación diferencial: $dw = (H - x)\rho\pi R^2\, dx$, la incógnita es la función $w = g(x)$, w representa en física "El trabajo que debe realizarse para bombear el agua de un tanque cilíndrico vertical de altura H y radio R en la base.

3. $\frac{dp}{dx} = k(a - p)$, en esta ecuación $p = f(x)$ es la función incógnita, donde "p" es la utilidad **NETA** y "x" es el gasto de propaganda.

1.2 CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Las ecuaciones diferenciales se clasifican en: ecuaciones diferenciales ***ordinarias*** *y* en ecuaciones diferenciales ***parciales***.

a) Las ecuaciones diferenciales ordinarias son aquellas que contienen como incógnita funciones con una sola variable independiente.

Ejemplos:

1. $\frac{ds}{dp}=-\frac{as}{p-b}$, $s=f(p)$ es la incógnita

2. $\frac{dy}{dx}+2y=y^2e^{-x}$, $y=f(x)$ es la incógnita

b) Las ecuaciones diferenciales parciales son aquellas que contienen como incógnita una función con dos o más variables independientes.

Ejemplos:

1. $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=z$, $z=f(x,y)$ es la incógnita

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=xy$, $u=g(x,y)$ es la incógnita

1.3 ORDEN Y GRADO DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Definición Se llama ecuación diferencial de orden "n" a toda ecuación que incluye a la derivada cuyo orden superior es "n".

Definición El grado de una ecuación diferencial es el de la ***derivada de mayor orden***, una vez que dicha ecuación haya sido racionalizada y se hayan quitado denominadores respecto de todas las derivadas.

Ejemplos:

1. $\frac{d^2y}{dt^2}=\sqrt{1+\frac{dy}{dt}}$, después de racionalizar obtenemos $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2=1+\frac{dy}{dt}$ (*orden*: $\frac{d^2y}{dt^2}$; *grado*: 2)

Esta ecuación diferencial ordinaria es de 2do grado y de orden 2.

2. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3-5\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+2x=0$ (*orden*: $\frac{d^2y}{dx^2}$; *grado*: 3)

Es una ecuación diferencial ordinaria de orden 2 y 3er grado.

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=z$

Es una ecuación diferencial parcial de segundo orden y 1er grado.

1.3.1 Solución de una Ecuación Diferencial

Se denomina solución de una ecuación diferencial a toda relación entre las variables que intervienen en dicha ecuación que no contengan ninguna derivada y que satisfaga idénticamente a dicha ecuación.

Las soluciones de una ecuación diferencial pueden ser: una solución general o una solución particular.

La **SOLUCIÓN GENERAL** de una ecuación diferencial ordinaria de orden "n", es una solución que contiene constantes de integración.

La **SOLUCIÓN PARTICULAR** de una ecuación diferencial ordinaria de orden "n", es una solución que se obtiene de la solución general dándole valores específicos a las constantes.

Simbólicamente, decimos:

La relación $y=g(x)$ es solución de la ecuación diferencial

$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0$ cuando:

$f(x, g(x), g'(x), g''(x), \dots, g^{(n)}(x)) \equiv 0$ ← *idéntico a cero*

Idénticamente decimos que la relación $z=h(x,y)$ es solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales de la forma:

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xy}, \dots)=0$$

Si $F(x, y, f(x, y), f_x(x, y), f_y(x, y), f_{xy}(x, y), \dots) \equiv 0$

1.3.2 Problemas Resueltos

Problema 01 Verificar que $Ln\, y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + x^2 + 2$ es una solución de: $\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 - Lny$

Veamos: NOTACIÓN: $\frac{dy}{dx} = y'$, $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$

1) Todo lo que hacemos es derivar dos veces la relación en dos variables:

$Ln\, y = c_1e^x + c_2e^{-x} + x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = Ln\, y - x^2}$, $c_1e^x + c_2e^{-x} + 2 = B$

i) $\frac{y'}{y} = c_1e^x + c_2e^{-x}(-1) + 2x + 0$

ii) $\Rightarrow \quad y' = \underbrace{y\,(\overbrace{c_1e^x - c_2e^{-x} + 2x}^{A})}_{\text{es un producto}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{y'}{y}}$

iii) $y'' = y'\underbrace{(c_1e^x - c_2e^{-x} + 2x)}_{A} + y\underbrace{(c_1e^x + c_2e^{-x} + 2)}_{B}$

sustituir A y B en *iii)*

$\Rightarrow \quad y'' = y'\frac{y'}{y} \quad + \quad y(Ln\, y - x^2)$

iv) $\Rightarrow \quad y'' = \frac{y'^2}{y} + y\,(Lny - x^2)$

2) Sustituir *i)* y *iv)* en la ecuación diferencial:

$$\left[\frac{1}{y}\cdot y(c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} + 2x)\right]^2 - \frac{1}{y}\left[\frac{y'^2}{y} + y\,(Lny - x^2)\right] =$$

v) $(c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} + 2x)^2 - \frac{y'^2}{y^2} - Lny + x^2 =$

3) Pero en *i)* tenemos: $\frac{y'}{y} = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} + 2x$ que al reemplazar en *v)* obtendremos:

$$\frac{y'^2}{y^2}-\frac{y'^2}{y^2}-Lny+x^2=\underline{\underline{-Ln\,y+x^2}}$$

↑ *Que es idénticamente igual al segundo miembro*

Problema 02 Verificar que $x = \cos 2t + 2\,c_1 \cos 3t + 3\,c_2 \,\text{sen}\, 3t$ es una solución de $\frac{d^2x}{dt^2}+9x=5\cos 2t$

Veamos:

1. Derivaremos dos veces la función: $x = f(t)$

i) $x=\cos 2t+2c_1\cos 3t+3c_2\,\text{sen}\,3t$

ii) $\frac{dx}{dt}=-2\,\text{sen}\,2t+2c_1(-3\,\text{sen}\,3t)+3c_2(3\cos 3t)$

$=-2\,\text{sen}\,2t-6c_1\,\text{sen}\,3t+9c_2\cos 3t$

iii) $\frac{d^2x}{dt^2}=-2(2\cos 2t)-6c_1(3\cos 3t)+9c_2(-3\,\text{sen}\,3t)$

$=-4\cos 2t-18c_1\cos 3t-27c_2\,\text{sen}\,3t$

2. Sustituir *iii)* e *i)* en el primer miembro de la ecuación diferencial:

$(-4\cos 2t-18\,c_1\cos 3t-27\,c_2\,\text{sen}\,3t)+9(\cos 2t+2\,c_1\cos 3t+3\,c_2\,\text{sen}\,3t)$

$=-4\cos 2t-\underline{18\,c_1\cos 3t}-\underline{\underline{27c_2\,\text{sen}\,3t}}+9\cos 2t+\underline{18c_1\cos 3t}+\underline{\underline{27c_2\,\text{sen}\,3t}}$

$=5\cos 2t$

↑ *Que es idéntico al 2do miembro*

Problema 03 Verificar que la relación $x^2+y^2=c$ es solución de la ecuación diferencial $yy'=-x$.

Solución:

Aquí se tiene $y=f(x)$, $\frac{dy}{dx}=y'$

1. Derivemos la relación $x^2+y^2=c$ respecto a x:

$\Rightarrow\ 2x+2yy'=0$

$\Rightarrow\ x+yy'=0$

$\Rightarrow\ yy'=-x$

Problema 04 Verificar que la función $y = 2 + c\sqrt{1-x^2}$ es solución de la ecuación diferencial $(1-x^2)y' + xy = 2x$.

Solución:

1) De $y = 2 + c\sqrt{1-x^2}$, hallar: $y' = \frac{dy}{dx}$

$$y' = 0 + c\,\frac{-2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$i) \quad \Rightarrow y' = \frac{-cx}{\sqrt{1+x^2}}$$

2) Sustituir $i)$ y (1) en la ecuación diferencial:

$$(1-x^2)\left(\frac{-cx}{\sqrt{1-x^2}}\right) + x\left(2 + c\sqrt{1-x^2}\right) = -\left(\sqrt{1-x^2}\right)cx + 2x + cx\sqrt{1-x^2} = 2x$$

Qué es idénticamente igual al 2do miembro.

Problema 05 Verificar que la función $y = \sqrt{x^2 - 2cx}$ es solución de la ecuación diferencial $(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$.

Solución:

1) De la función $y = \sqrt{x^2 - 2cx}$

obtenemos: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2c}{2\sqrt{x^2 - 2cx}}$, pues si $y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

2) $\Rightarrow$ $$dy = \left(\frac{x-c}{\sqrt{x^2 - 2cx}}\right)dx$$

3) Sustituir (1) y (2) en la ecuación diferencial:

$$(x^2 + y^2)dx - 2x\sqrt{x^2 - 2cx}\left(\frac{x-c}{\sqrt{x^2 - 2cx}}\right)dx =$$

$$= (x^2 + y^2)dx - 2x(x-c)dx$$

$$= \left(x^2 + (\sqrt{x^2 - 2xc})^2\right)dx - 2x(x-c)dx$$

$= (x^2 + x^2 - 2xc)\,dx - 2x\,(x - c)\,dx$

$= (2x^2 - 2xc)\,dx - 2x\,(x - c)\,dx$

$= 2x\,(x - c)\,dx - 2x\,(x - c)\,dx = 0$

Problema 06 Comprobar que la relación $e^{-y} - cx = 1$ es solución de la ecuación diferencial $xy' + 1 = e^y$.

***Solución*:**

1) De la relación $e^{-y} - Cx = 1$, hallar la $\frac{dy}{dx}$:

$$e^{-y}(-y') - C = 0 \quad , \text{ donde } \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad -y'e^{-y} - C = 0$$

$$\Rightarrow \quad y' = -\frac{C}{e^{-y}} = -Ce^y$$

2) Sustituir y' en la ecuación diferencial:

$x(-Ce^y) + 1 = -Cxe^y + 1$ .... (2∗)

3) De la relación: $e^{-y} - Cx = 1$

obtenemos: $Cx = e^{-y} - 1$ .... (3∗)

4) Sustituir (3∗) en (2∗) : $= -(e^{-y} - 1)\,e^y + 1$

$= -e^{-y}\,e^y + e^y + 1$

$= -e^0 + e^y + 1$

$= -1 + e^y + 1 = e^y$

Que es idénticamente igual al 2do miembro.

Problema 07 Comprobar que la relación $y^3 = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^3}$ satisface la ecuación diferencial $xy^2dy + y^3dx = \frac{2dx}{3x}$

***Solución*:**

1) Al dividir por dx la ecuación diferencial obtenemos:

$xy^2y' + y^3 = \frac{2}{3x}$ .... (*1) donde $y' = \frac{dy}{dx}$

2) De la relación $y^3 = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^3}$, obtener y' :

$$\Rightarrow \quad 3y^2y' = -\frac{1}{x^2} + C\left(-\frac{3}{x^4}\right)$$

3) Por $\frac{1}{3}x$: $\quad xy^2y' = -\frac{1}{3x} - \frac{C}{x^3}$

4) Sustituir 3) y 2) en (1*)

$$-\frac{1}{3x} - \frac{C}{x^3} + \frac{1}{x} + \frac{C}{x^3} = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{3x}$$ ■

Problema 08 Comprobar que la relación $\text{arctg}\,\frac{y}{x} - Ln(C\sqrt{x^2+y^2}) = 0$ es solución de la ecuación diferencial $(x+y)\,dx - (x-y)\,dy = 0$

Solución:

1) Teniendo en cuenta que $Ln\,(AB) = Ln\,A + Ln\,b$ derivemos implícitamente la relación dada:

$$\text{arctg}\,\frac{y}{x} - Ln\,C - \frac{1}{2}Ln(x^2+y^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} - 0 - \frac{1}{2}\,\frac{\frac{d}{dx}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{xy'-y(1)}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} - \frac{1}{2}\,\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{xy'-y}{x^2+y^2} - \frac{x+yy'}{x^2+y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{xy'}} - y - x - \underline{\underline{yy'}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad y'(x-y) - (x+y) = 0$$, donde $y' = \frac{dy}{dx}$

$$(x+y)dx - (x-y)dy = 0$$, al multiplicar por -1.

Problema 09 Verificar que las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = t + \text{arcsen}\, t \\ y = \frac{t^2}{2} - \sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

es solución de la ecuación diferencial $x = Ln\, y' + \text{sen}\, y'$

Solución:

1) Se sabe que $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, $si \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

2) Obtengamos entonces las derivadas de "x" e "y" con "respecto a t".

Veamos:

3) *i)* De $y = \frac{t^2}{2} - \sqrt{1-t^2}$, obtenemos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \cdot 2t - \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{dy}{dt} = t + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

ii) De $x = t + \text{arc sen}\, t$, obtenemos:

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

iii) Luego:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t\sqrt{1-t^2} + t}{\sqrt{1-t^2} + 1} = \frac{t\left(\sqrt{1-t^2} + 1\right)}{\left(\sqrt{1-t^2} + 1\right)}$$

iv) $y' = \frac{dy}{dx} = t$

4) Sustituir *iv*) en el 2[do] miembro de la ecuación diferencial:

$$y' + \text{arcsen}\, y' = \underbrace{t + \text{arc sen}\, t}_{x}$$

(*lqqd*)

Problema 10 Comprobar que la relación:

$x^3 - 4x^2y + 2xy^2 - y^3 = 0$ es solución de la ecuación diferencial

$(3x^2 - 8xy + 2y^2)dx - (4x^2 - 4xy + 3y^2)dy = 0$.

***Solución*:**

1) Por derivación implícita hallemos $\frac{dy}{dx} = y'$ o simplemente hallar las diferenciales "*dx*" *y* "*dy*" teniendo en cuenta la definición siguiente:

El diferencial de una función es igual a la derivada de la función multiplicado por el diferencial de la variable.

Veamos:

De $x^3 - 4x^2y + 2xy^2 - y^3 = 0$, obtenemos:

$$3x^2\, dx - 4\,(x^2\, dy + y \cdot 2x dx) + 2\,(x \cdot 2y dy + y^2\, dx) - 3y^2\, dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{3x^2 dx} - 4x^2 dy - \underline{8xy\, dx} + 4xy\, dy + \underline{2y^2\, dx} - 3y^2 dy = 0$$

2) Agrupando: $(3x^2 - 8xy + 2y^2)\, dx - (4x^2 - 4xy + 3y^2)\, dy = 0$

(*lqqd*)

1.3.3 Problemas Propuestos – Grupo 1

Verifique las siguientes soluciones de las correspondientes ecuaciones diferenciales escritas a continuación:

1) $y = x + 3x^2$; $y'(x + 3x^2) - y(1 + 6x) = 0$

2) $y = x^3 + C_1 x^2 + C_2$; $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - 3 = 0$

3) $y = x\sqrt{1 - x^2}$; $yy' = x - 2x^3$

4) $x = C_1 \cos wt + C_2 \operatorname{sen} wt$; $\frac{d^2 x}{dt^2} + w^2 x = 0$

5) $y \; Ln(x \cdot y)$; $(xy - x)\; y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0$

6) $y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + Ce^x$; $y' - y = e^{x + x^2}$

7) $y = x\left(\int \frac{e^x}{x} dx + C \right)$; $xy' - y = xe^x$

8) $\begin{cases} x = te^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$; $(1 + xy)\; y' + y^2 = 0$

9) $\begin{cases} x = t\; Ln t \\ y = t^2\;(2 Ln t + 1) \end{cases}$; $y' Ln \frac{y'}{4} = 4x$

10) $x = ye^{cy+1}$; $y' = \frac{y}{x Ln \frac{x}{y}}$

11) $x = y Ln Cy$; $y'(x + y) = y$

12) $x\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = y\,Lny$; $xy' + x\,Ln\,y = x\operatorname{sen} x + y\,Lny$

13) Demostrar que la función $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ satisface a la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

14) Demostrar que la función $u(x,t) = A\operatorname{sen}(a\lambda t + \varphi)\operatorname{sen}\lambda x$ satisface a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

15) Demostrar que $z = x\,f\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$ satisface a la ecuación:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL A PARTIR DE UNA FAMILIA DE CURVAS

Problema 11 Formar la ecuación diferencial cuya solución es la familia de curvas $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

Solución:

1) En primer lugar, tener en cuenta que el "número de constantes indeterminadas que existen en la curva, indicarán el número de veces que habrá que derivarse la función $y = f(x)$ ".

En el presente problema:

- Se tienen dos constantes indeterminadas C_1 y C_2;
- Por tanto deberá hallarse y' y y'';
- Finalmente resolver un sistema de ecuaciones con incógnitas C_1 y C_2 para sustituir en la función solución.

Veamos:

2) De $y = C_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$, obtenemos:

$$(\alpha)\begin{cases} y' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} & \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{I}) \\ y'' = 4C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} & \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{II}) \end{cases}$$

3) Resolver el sistema (α) por el método de determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2e^{2x} & -e^{-x} \\ 4e^{2x} & e^{-x} \end{vmatrix} = (2e^{2x})(e^{-x}) - (4e^{2x})(-e^{-x})$$

$$= 6e^{x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y' & -e^{-x} \\ y'' & e^{-x} \end{vmatrix} = y'e^{-x} + y''e^{-x} = e^{-x}(y' + y'')$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2e^{2x} & y' \\ 4e^{2x} & y'' \end{vmatrix} = 2y''e^{2x} - 4y'e^{2x} = 2e^{2x}(y'' - 2y')$$

Las constantes C_1 y C_2 son: $C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{e^{-x}(y' + y'')}{6e^{x}} = \frac{1}{6}e^{-2x}(y' + y'')$

$$C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2e^{2x}(y'' - 2y')}{6e^{x}} = \frac{1}{3}e^{x}(y'' - 2y')$$

4) Sustituir en (2): $y = \frac{1}{2}e^{-2x}(y' + y'') + \frac{1}{3}e^{x}(y'' - 2y')e^{-x}$

Al simplificar: $y'' - y' - 2y = 0$

Problema 12 Formar la ecuación diferencial, cuya solución es la familia de curvas $y = (C_1 + C_2 x)e^{x} + C_3$.

Solución:

1) Como existen 3 constantes C_1, C_2, C_3; debemos derivar 3 veces:

De $y = (C_1 + C_2 x)e^{x} + C_3$

1ra derivada: $y' = (0 + C_2)e^{x} + (C_1 + C_2 x)e^{x} + 0$

$$y' = C_2 e^{x} + C_1 e^{x} + C_2 x e^{x}$$

(i) $$\boxed{y' = C_1 e^{x} + C_2 e^{x}(1 + x)}$$

2da derivada: $y'' = C_1 e^{x} + C_2[e^{x}(1 + x) + e^{x}(0 + 1)]$

$$y'' = C_1e^x + C_2[2e^x + xe^x]$$

(*ii*) $$\boxed{y'' = C_1e^x + C_2e^x[2+x]}$$

3ra derivada: $$y''' = C_1e^x + C_2[e^x(2+x) + e^x(0+1)]$$

$$y''' = C_1e^x + C_2e^x[2+x+1]$$

(*iii*) $$\boxed{y''' = C_1e^x + C_2e^x(x+3)}$$

2) Porque en (*i*), (*ii*) y (*iii*) no aparece la constante C_3, no se puede resolver el sistema mediante determinantes.

Resolvamos mediante sustitución:

En *iii*) hacemos: $y''' = C_1 e^x + C_2 e^x [(x+2)+1]$

$$y''' = \underbrace{C_1 e^x + C_2 e^x (x+2)}_{y''} + C_2 e^x$$

3) $y''' = y'' + C_2 e^x$

4) Ahora debemos hallar la constante C_2.

Como ya usamos la ecuación (*iii*), deberemos usar las ecuaciones de (*i*) y (*ii*) para hallar C_2.

Veamos:

$$\begin{cases} i) & y' = C_1 e^x + C_2 e^x (1+x) \\ ii) & y'' = C_1 e^x + C_2 e^x (2+x) \end{cases}$$

Restar (*i*) – (*ii*) : $y' - y'' = 0 + C_2e^x(1+x) - C_2e^x(2+x)$

$$y' - y'' = \underline{C_2e^x} + \underline{\underline{C_2xe^x}} - \underline{2C_2e^x} - \underline{\underline{C_2xe^x}}$$

$$y' - y'' = -C_2e^x$$

$$\Rightarrow \quad y'' - y' = C_2e^x \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_2 = \frac{y''-y'}{e^x}} \qquad (5)$$

6) Sustituir (5) en (3)

$$y''' = y'' + \frac{y'' - y'}{e^x} e^x$$

$$y''' = y'' + y'' - y' \iff \boxed{y''' - 2y'' + y' = 0}$$

Problema 13 Obténgase la ecuación diferencial cuya primitiva es la función: $c_1 y - x = c_2 x y$.

***Solución*:**

1) La idea para resolver es: "si hay dos constantes, entonces debe hallarse y' e y'' y formar un sistema de 2 ecuaciones cuyas incógnitas son c_1 y c_2".

Veamos:

De: $c_1 y - x = c_2 xy$, hallamos y' :

$$\Rightarrow \quad c_1 y' - 1 = c_2 (1 \cdot y + xy')$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c_1 y' - c_2 (y + xy') = 1} \qquad (2)$$

3) De (2) hallaremos y''

$$c_1 y'' - c_2 [\, y' + 1 \cdot y' + xy'' \,] = 0$$

4) $\boxed{c_1 y'' - c_2 (2y' + xy'') = 0}$

5) Ahora tenemos, con (2) y (4) el siguiente sistema:

$$\begin{cases} c_1 y' - c_2 (y + xy') = 1 \\ c_1 y'' - c_2 (2y' + xy'') = 0 \end{cases}$$

6) Resolvemos, este sistema por determinantes:

donde $\Delta = \begin{vmatrix} y' & -(y + xy') \\ y'' & -(2y' + xy') \end{vmatrix}$

$$= -y'(2y' + xy'') + y''(y + xy')$$

$$= -2y'^2 + y y''$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -(x+xy') \\ 0 & -(2y'+xy') \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y' & 1 \\ y'' & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$c_1 = \frac{-(2y'+xy'')-0}{\Delta} \qquad c_2 = \frac{0-y''}{\Delta}$$

7) Luego: $c_1 = \dfrac{-(2y'+xy'')}{-2y'^2+yy''}$

$$c_2 = \frac{-y''}{-2y'^2+yy''}$$

8) Sustituir (7) en la relación: $c_1 y - x = c_2 xy$

$$\Rightarrow \quad \frac{-(2y'+xy'')}{-2y'^2+yy''}y - x = \frac{-y''}{-2y'^2+yy''}xy$$

$$\Rightarrow \quad -(2y'+xy'')y - x(-2y'^2+yy'') = -xyy''$$

$$\Rightarrow \quad -2yy' - xyy'' + 2xy'^2 - \underline{xyy''} + \underline{xyy''} = 0$$

$\Rightarrow \quad -2yy' - xyy'' + 2xy'^2 = 0$, ordenando y cambiando de signo:

$$\Rightarrow \quad xyy'' - 2xy'^2 + 2yy' = 0$$

(lqqd)

Problema 14 Obténgase la ecuación diferencial cuya primitiva es la función: $y = e^x(c_2\cos x + c_3 \operatorname{sen} x) + c_1 + \frac{x}{4}$

***Solución*:**

1) La idea es "si hay 3 constantes deberá hallarse y', y'', y''', para formar un sistema de 3 ecuaciones cuyas incógnitas son c_1, c_2, c_3".

Veamos:

De $y = e^x(c_2\cos x + c_3 \operatorname{sen} x) + c_1 + \frac{x}{4} \Longleftrightarrow \boxed{c_2 \cdot \cos x + c_3 \operatorname{sen} x = \frac{1}{e^x}\left(y - c_1 - \frac{x}{4}\right)}$ ... (2)

i) $y' = e^x(-c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos x) + e^x(c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x) + 0 + \frac{1}{4}$

$y' = -c_2 e^x \operatorname{sen} x + c_3 e^x \cos x + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \operatorname{sen} x + \frac{1}{4}$

$y' = c_2(-e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x) + c_3(e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x) + \frac{1}{4}$

$$y' = e^x(c_3 \cos x - c_2 \operatorname{sen} x) + e^x(c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x) + \frac{1}{4} \quad \text{.........} \ (3)$$

ii) $y'' = c_2(-e^x \cdot \cos x - e^x \operatorname{sen} x + e^x(-\operatorname{sen} x) + e^x \cos x) + c_3[e^x(-\operatorname{sen} x) + e^x \cos x + e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x] + 0$

$y'' = c_2(-2e^x \operatorname{sen} x) + c_3(2e^x \cos x)$

$y'' = -2c_2 e^x \operatorname{sen} x + 2c_3 e^x \cos x$

$$y'' = 2e^x(c_3 \cos x - c_2 \operatorname{sen} x) \Rightarrow c_3 \cos x - c_2 \operatorname{sen} x = \frac{y''}{2e^x} \quad \text{.........} \ (4)$$

iii) $y''' = -2c_2(e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x) + 2c_3(e^x(-\operatorname{sen} x) + e^x \cos x)$

$y''' = -2c_2(e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x) + 2c_3(-e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x)$

$$y''' = 2e^x(c_3 \cos x - c_2 \operatorname{sen} x) - 2e^x(c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x) \quad \text{.........} \ (5)$$

6) Sustituir (2) y (4) en (3) y (5) respectivamente:

En (3): $y' = e^x\left[\frac{y''}{2e^x}\right] + e^x\left[\frac{1}{e^x}\left(y - c_1 - \frac{x}{4}\right)\right] + \frac{1}{4}$

$y' = \frac{y''}{2} + y - c_1 - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \ y - c_1 - \frac{x}{4} = y' - \frac{y''}{2} - \frac{1}{4} \quad \text{.........................} \ (7)$$

En (5): $y''' = 2e^x\left[\frac{y''}{2e^x}\right] - 2e^x\left[\frac{1}{e^x}\left(y - c_1 - \frac{x}{4}\right)\right]$

$$y''' = y'' - 2\left(y - c_1 - \frac{x}{4}\right) \quad \text{.........................} \ (8)$$

Sustituir (7) en (8):

$$y''' = y'' - 2\left[y' - \frac{y''}{2} - \frac{1}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \quad y''' = \underline{\underline{y''}} - 2y' + \underline{\underline{y''}} + \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{y''' - 2y'' + 2y' = \frac{1}{2}}$$

Como podrá usted apreciar, era más sencillo hacer diversas sustituciones que resolver el sistema de ecuaciones.

Problema 15 Obténgase la ecuación diferencial cuya primitiva es la función: $y = c_1 \operatorname{sen} ax + c_2 \cos ax$.

***Solución*:**

1) La idea es: "como hay dos constantes c_1 y c_2, habrá que derivarse dos veces".

Veamos:

De $y = c_1 \operatorname{sen} ax + c_2 \cos ax$, obtenemos: .... (1)

i) $y' = c_1 (a \cos ax) + c_2 (-a \operatorname{sen} ax)$

$y' = a\, c_1 \cos ax - a\, c_2 \operatorname{sen} ax$ .... (2)

ii) $y'' = a\, c_1 (-a \operatorname{sen} ax) - a\, c_2 (a \cos ax)$

$y'' = -a^2 c_1 \operatorname{sen} ax - a^2 c_2 \cos ax$ .... (3)

Con (2) y (3) se forma el sistema: $\begin{cases} y' = ac_1 \cos ax - ac_2 \operatorname{sen} ax \\ y'' = -a^2 c_1 \operatorname{sen} ax - a^2 c_2 \cos ax \end{cases}$

Ahora, hallar C_1 y C_2 por determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a \cos ax & -a \operatorname{sen} ax \\ -a^2 \operatorname{sen} ax & -a^2 \cos ax \end{vmatrix}$$

$$\Delta = -a^3 \cos^2 ax - a^3 \operatorname{sen}^2 ax$$

$$\Delta = -a^3 \underbrace{(\cos^2 ax + \operatorname{sen}^2 ax)}_{1}$$

$$\boxed{\Delta = -a^3} \quad , \quad a \neq 0$$

Además:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y' & -a\,\text{sen}\,ax \\ y'' & -a^2\cos ax \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a\cos ax & y' \\ -a^2\text{sen}\,ax & y'' \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$c_1 = \frac{-a^2y'\cos ax + ay''\,\text{sen}\,ax}{-a^3} \qquad c_2 = \frac{ay''\cos ax + a^2y'\,\text{sen}\,ax}{-a^3}$$

$$c_1 = \frac{-ay'\cos ax + y''\,\text{sen}\,ax}{-a^2} \qquad c_2 = \frac{y''\cos ax + ay'\,\text{sen}\,ax}{-a^2}$$

Sustituir c_1 y c_2 en (1).

$$y = \left(\frac{-ay'\cos ax + y''\,\text{sen}\,ax}{-a^2}\right)\text{sen}\,ax + \left(\frac{y''\cos ax + ay'\,\text{sen}\,ax}{-a^2}\right)\cos ax$$

$$-a^2y = -ay'\cos ax\,\text{sen}\,ax + y''\,\text{sen}^2\,ax + y''\cos^2 ax + ay'\,\text{sen}\,ax\cos ax$$

$$-a^2y = y''\underbrace{(\text{sen}^2\,ax + \cos^2 ax)}_{1}$$

$$-a^2y = y'' \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{y'' + a^2y = 0}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS – GRUPO 2

Obténganse las ecuaciones diferenciales cuyas primitivas sean las siguientes funciones:

01. $y = x + cx^2$ Rpta.: $xy' - 2y + x = 0$
02. $cx + 2cy = y$ Rpta.: $xy' - y = 0$
03. $c^2 - cx = y$ Rpta.: $y'^2 + xy' = y$
04. $c_1x^2 + c_2y = x$ Rpta.: $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$
05. $y = c_1e^x + c_2xe^x$ Rpta.: $y'' - 2y' + y = 0$
06. $y = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x + x^2$ Rpta.: $y''' - 2y'' + y' = 2x - 4$
07. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{x/2} + e^x$ Rpta.: $2y'' + y' - y = 2e^x$
08. $y = c_1e^x + c_2e^{-5x} - 0.2$ Rpta.: $y'' + 4y' - 5y = 1$
09. $y = (c_1 + c_2x)e^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$ Rpta.: $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$
10. $y = e^{2x}(c_1 + c_2x)$ Rpta.: $y'' - 4y' + 4y = 0$

1.4 TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Supongamos que las funciones $F(x,y)$ y $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)$ son continuas en un rectángulo cerrado $\Re$ del plano XY y que (x_0,y_0) es un punto interior de $\Re$.

Entonces, el problema del valor inicial (PVI):

$y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$ ....(1)

tiene una solución $y(x)$ en un intervalo x de I que contiene a x_0 (existencia), pero no más de una solución en $\Re$ en cualquier intervalo de x que contenga a x_0 (unicidad).

EJEMPLO 1

Compruebe que existe exactamente una solución para el siguiente PVI:

$$y'=x \quad , \quad y(0)=1$$

Solución:

- Se pide hallar $y(x)$, sabiendo que $y'=f(x,y)=x$, $y_0=1$.
- Empezar haciendo el cálculo: $y_0(x)=1$
- El segundo cálculo es:

$$y_1(x)=1+\int_0^x f(s,y_0)\,ds \quad , \text{ donde } \quad f(s,1)=S \quad , \quad y_0=1$$

$$=1+\int_0^x S\cdot ds$$

$$=1+\left[\frac{S^2}{2}\right]_{s=0}^{s=x}$$

$$=1+\frac{x^2}{2} \Leftarrow \text{ aquí } \frac{dy_1}{dx}=x=y'$$

- En dos iteraciones hemos hallado la solución de PVI, que es $y(x)=1+\frac{x^2}{2}$

EJEMPLO 2

Hallar la solución del PVI.

$$y'=-y \quad , \quad y(0)=1$$

Solución:

Se pide hallar $y(x)=?$

- Se tiene como datos: $y'=f(x,y)=-y$, $y_0=1$
- Se empieza con $y_0(x)=1$
- La segunda iteración es: $y_1(x)=1+\int_0^x f(s,y_0)ds$, donde $f(s,y_0)=-y_0$

$$= -1$$

$$y_1(0)=1+\int_0^x(-1)ds \text{ , donde } \int_0^x(-1)ds=-S|_0^x=-x$$

$$=1-x$$

- La segunda iteración es: $y_2(x)=1+\int_0^x f(s,y_1(s))ds$, donde $f(s,y_1(s))=-(1-5)$

$$=1+\int_0^x[-(1-s)]ds$$

$$=1-\left[s-\frac{s^2}{2}\right]_{s=0}^{s=x}$$

$$=1-x+\frac{x^2}{2}$$

- La tercera iteración es: $y_3(x)=1+\int_0^x f(s,y_2)\cdot ds$

$$=1+\int_0^x\left[-\left(1-s+\frac{s^2}{2}\right)ds\right]$$

$$=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$$

- Si proseguimos, nos percatamos que se trata del polinomio de Taylor que define a la función exponencial $f(x)=e^{-x}$.

- **Conclusión:** La solución del P.V.I es $f(x)=e^{-x}$.

Observación:

1. Lo que hemos hecho es la **ITERACIÓN DE PICARD.**
2. Para situaciones prácticas, lo que se hace es, resolver la ecuación diferencial y luego imponer las condiciones iniciales con el fin de hallar la constante de integración.

EJEMPLO 3

Hallar la solución del **P.V.I.** $y' = \frac{1}{y}$, $y(0) = 4$, $y > 0$

Solución:

- Lo primero que se hace, es resolver la ecuación diferencial ordinaria (**E.D.O.**):

$$y' = \frac{1}{y} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \iff y \cdot dy = dx$$

$$\int y \cdot dy = \int dx + C$$

$$\frac{y^2}{2} = x + C$$

$$y^2 = 2(x + C)$$

$$y = \sqrt{2(x+C)} \quad \text{, pues } y > 0$$

- Ahora imponer la condicional inicial:

$$\underbrace{y(0)}_{\sqrt{2(0+C)}} = 4$$

$$\sqrt{2(0+C)} = 9 \iff \sqrt{2C} = 4 \iff 2C = 16 \iff C = 8$$

- Entonces la solución de **P.V.I.** es $y(x) = \sqrt{2(x+8)}$

EJEMPLO 4

¿Se puede aplicar el teorema de existencia y unicidad al siguiente **P.V.I.**

$$2xyy' = x^2 + y^2 \quad , \quad y(0) = 1\,?$$

Solución:

- En primer lugar, despejar y' en función de (x, y), así:
  $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$. Aquí tenemos la función $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$
- La condición de valor inicial está dada por: cuando $x = 0$, el valor de y es $y = 1$. Notamos que la función $f(x, y)$ no está definido en los puntos $(0, y)$, pues $f(0, y) = \frac{y^2}{0}$ no tiene sentido, porque la división entre cero no está definido.

CAPÍTULO 2

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN Y PRIMER GRADO

2.1 DEFINICIÓN

Una ecuación diferencial de primer orden y primer grado es de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

o lo que es equivalente a: $M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = 0$ .... (I)

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{-\frac{N(x,y)}{M(x,y)}}_{F(x,y)}$$

2.2 CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DE PRIMER ORDEN Y PRIMER GRADO

Una ecuación diferencial de primer orden y primer grado se pueden presentar de 6 tipos diferentes, éstas son:

1. VARIABLES SEPARABLES

En este caso la ecuación diferencial dado en (I) se presenta de la forma.

$M(x)dx + N(y)dy = 0$ esto indica que "M" es función sólo de "x" y "N es función sólo de y"

Se resuelve, tan solo integrando cada término.

Así: $$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = c$$

EJEMPLO 1 Resolver: $y(1-x)dx + x^2(1-y)dy = 0$

Solución:

Hacemos la separación de variables: $\frac{(1-x)}{x^2}dx + \frac{(1-y)}{y}dy = 0$

Integramos: $$\int \frac{1-x}{x^2}dx + \int \frac{1-y}{y}dy = c$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2}\right)dx + \int \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y}\right)dy = c$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(x^{-2} - \frac{1}{x}\right)dx + \int \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^{-1}}{-1} - Ln|x| + Ln|y| - y = c$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{x} - Ln|x| + Ln|y| - y = c$$

$$\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{x} - y + Ln\left|\frac{y}{x}\right| = c$$

esta solución la podemos transformar en:

$$\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{x} - y + Ln\left|\frac{y}{x}\right| = Ln\,k \quad , \quad c = Ln\,k$$

$$\Longleftrightarrow \quad Ln\left|\frac{y}{x}\right| - Ln\,k = y + \frac{1}{x}$$

$$\Longleftrightarrow \quad Ln\left|\frac{y}{kx}\right| = y + \frac{1}{x}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{y}{kx} = e^{y+\frac{1}{x}} \quad , \quad \text{pues:} \quad Ln\,N = m \Longleftrightarrow \underline{\underline{N = e^m}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{y = kx\,e^{y+\frac{1}{x}}}$$

2. ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Son aquellas donde se verifican que: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y}$

La solución de una ecuación diferencial exacta se halla por tres métodos diferentes, que se verá más adelante.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

En este caso $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas de grado $n \cdot (n \in Z^{+})$

Se resuelven haciendo la sustitución $y = vx$, con esta sustitución se convierten en variables separables de la forma $M(x)\ dx + M(y)\ dy = 0$.

4. ECUACIONES REDUCIBLES A HOMOGÉNEAS

Se presentan de la forma: $(Ax + By + C)\ dx + (A_1x + B_1y + C_1)\ dy = 0$

En este caso, se resuelven haciendo las sustituciones:

$$u = Ax + By + C$$

$$v = A_1 x + B_1 y + C_1$$

y se convierte la ecuación diferencial en **HOMOGÉNEA.**

A continuación se procede con el tipo 2.

5. ECUACIONES LINEALES DE PRIMER GRADO DE LA FORMA

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Se resuelve con la fórmula: $y = e^{-\int a(x)dx}[e^{\int a(x)dx} \cdot b(x)dx + C]$

6. ECUACIONES REDUCIBLES A LINEALES.

Una ecuación que se reduce fácilmente a lineal es la **ECUACIÓN DE BERNOULLI** que es de la forma:

$$y' + y\,P(x) = y^n\,Q(x)\ ,\ \ n \neq 0\ ,\ \ n \neq 1$$



A continuación trataremos cada tipo de las ecuaciones diferenciales, detalle por detalle.



2.2.1 Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables

Hemos dicho que si la ecuación diferencial:

$M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = 0$ se puede escribir de la forma

$M(x)\ dx + N(y)\ dy = 0$, entonces se resuelve

FUNCIÓN DE y

FUNCIÓN DE x

integrando directamente cada término.

Así: $$\int M(x)\, dx + \int N(y)\, dy = C$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Hallar la solución general de cada uno de las siguientes ecuaciones diferenciales:

Problema 16 $(y+2)\ dx + (x-2)\ dy = 0$

Solución:

1) La idea es "**AGRUPAR** los términos en x multiplicando a dx" y "agrupar los términos en y, multiplicando a dy".

Veamos: $\frac{1}{x-2}\, dx + \frac{1}{y+2}\, dy = 0$

2) Ahora, integrar directamente, cada término:

$$\int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{1}{y+2} dy = C$$

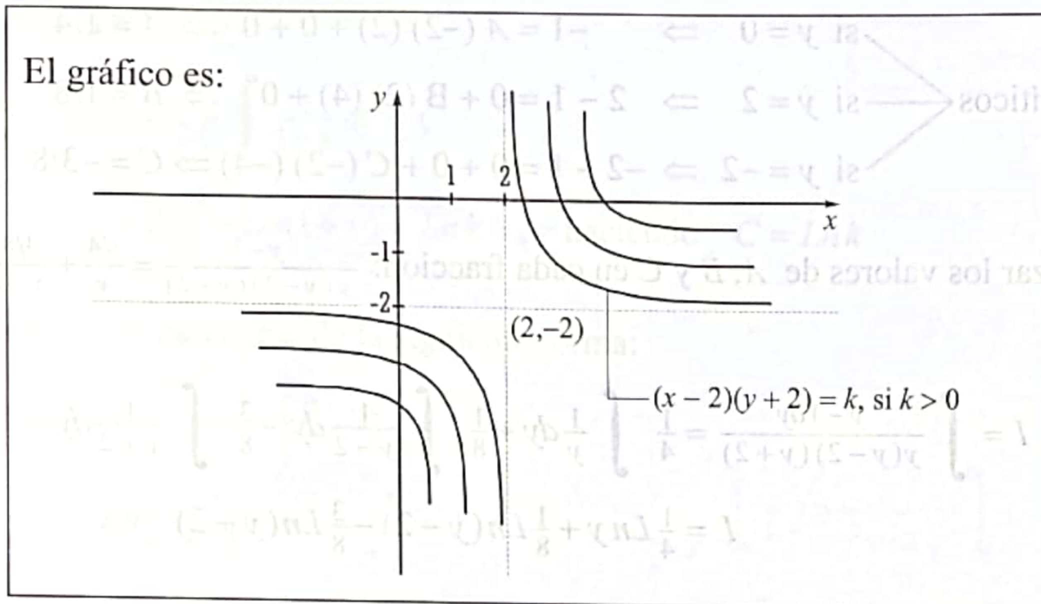
$\Rightarrow$ $Ln\,|x-2| + Ln\,|y+2| = Ln\, k$, haciendo $C = Ln\, k$ son constantes

$\Rightarrow$ $Ln\,(x-2)\,(y+2) = Ln\, k$, propiedad: $Ln\, A + Ln\, B = Ln\,(AB)$

$\Rightarrow$ $\boxed{(x-2)\ (y+2) = k}$, aplicando antilogaritmo.

Es una familia de hipérbolas equiláteras de centro en $(2,-2)$

El gráfico es:



Problema 17 Resolver: $2xy\,(4-y^2)\,dx+(y-1)\,(x^2+2)\,dy=0$

***Solución*:**

1) "Agrupar los términos en x junto a dx" y "los términos en y junto a dy"

$$\frac{2x}{x^2+2}\,dx+\frac{y-1}{y(4-y^2)}\,dy=0$$

2) Integrar cada término:

$$\int\frac{2x}{x^2+2}\,dx+\int\frac{y-1}{y(4-y^2)}\,dy=c$$

$u=x^2+2\;,\;\; du=2x\cdot dx$

$$\Rightarrow\quad Ln\,(x^2+2)-\underbrace{\int\frac{y-1}{y(y^2-4)}}_{\text{I}}=c$$

Cálculo de I **:** Por fracciones parciales

$$\frac{y-1}{y(y^2-4)}=\frac{y-1}{y(y-2)(y+2)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{y-2}+\frac{C}{y+2}$$

$$=\frac{A(y-2)(y+2)+By(y+2)+Cy(y-2)}{y(y-2)(y+2)}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{y-1=A(y-2)(y+2)+By(y+2)+Cy(y-2)}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(*)$$

En (*) :

Puntos críticos

si $y = 0 \Rightarrow -1 = A(-2)(2) + 0 + 0 \Rightarrow A = 1/4$

si $y = 2 \Rightarrow 2 - 1 = 0 + B(2)(4) + 0 \Rightarrow B = 1/8$

si $y = -2 \Rightarrow -2 - 1 = 0 + 0 + C(-2)(-4) \Rightarrow C = -3/8$

Reemplazar los valores de A, B y C en cada fracción: $\frac{y-1}{y(y-2)(y+2)} = \frac{1/4}{y} + \frac{1/8}{y-2} + \frac{-3/8}{y+2}$

Integrar: $I = \int \frac{y-1\,dy}{y(y-2)(y+2)} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{y}dy + \frac{1}{8}\int \frac{1}{y-2}dy - \frac{3}{8}\int \frac{1}{y+2}dy$

$$I = \frac{1}{4}Ln\,y + \frac{1}{8}Ln(y-2) - \frac{3}{8}Ln(y+2)$$

Sustituir en el 2do paso: $\underline{\underline{Ln(x^2+2)}} - \frac{1}{4}Ln\,y - \frac{1}{8}Ln(y-2) + \underline{\underline{\frac{3}{8}Ln(y+2)}} = Ln\,k$

Aplicando propiedades de logaritmos: $\begin{cases} Ln\,A + Ln\,B = Ln\,(AB) \\ Ln\,A - Ln\,B = Ln\,A/B \\ \frac{n}{m}\,Ln\,A = Ln\,A^{n/m} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad Ln\left[\frac{(x^2+2)(y+2)^{3/8}}{y^{1/4}(y-2)^{1/8}}\right] = Ln\,k$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x^2+2)(y+2)^{3/8}}{y^{1/4}(y-2)^{1/8}} = k$$

Elevar a la 8va potencia ambos miembros: $\frac{(x^2+2)^8(y+2)^8}{y^2(y-2)} = k^8$, si $k^8 = C$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(x+2)^8\,(y+2)^3 = C\,y^2\,(y-2)}$$

Problema 18 Resolver $(1+y)dx + \frac{dy}{x^2-2x} = 0$

Solución:

1) "Agrupar los términos en x junto al dx" y "separar los términos de y junto al dy"
$(x^2 - 2x)\,dx + \frac{1}{1+y}dy = 0$.

2) Integrar cada término

$$\int (x^2 - 2x)dx + \int \frac{1}{1+y}dy = C$$

$$\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + Ln(1+y) = Lnk \quad , \quad \text{haciendo} \quad C = Lnk$$

Que bien podría escribirse de la siguiente forma:

$$Ln(y+1) - Lnk = x^2 - \frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad Ln\left(\frac{y+1}{k}\right) = x^2 - \frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{y+1}{k} = e^{x^2 - \frac{x^3}{3}}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{y = ke^{x^2 - \frac{x^3}{3}} - 1}$$

Problema 19 Resolver: $y\sqrt{y^2 - 1}\,dx - \sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$

Solución:

1) "Agrupar los términos en x junto al dx" y "agrupar los términos en y junto al dy"

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{1}{y\sqrt{y^2-1}}dy = 0$$

2) Integrar cada término:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{1}{y\sqrt{y^2-1}}dy = C$$

Fórmula:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{arcsen}\,\frac{u}{a}$$

$$\begin{cases} u = x \\ a = 1 \end{cases}$$

Fórmula:

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}arc\sec\frac{u}{a}$$

$$\begin{cases} u = y \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\text{arc sen}\,x - \text{arc sec}\,y = C$$

Problema 20 Resolver $x\sqrt{y^2-1}\,dx-\sqrt{1-x^2}\,dy=0$

Solución:

1) "Agrupar los términos en x junto al dx" y "los términos en y junto a dy"

Veamos: $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx-\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}\,dy=0$

2) Integrar cada término:

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx-\int\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}\,dy=c$$

Aplicar: $\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=Ln|u+\sqrt{u^2-a^2}|$

$$\Rightarrow\quad\int x\underbrace{(1-x^2)}_{u}{}^{-1/2}\,dx-Ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right|=Ln\,k\quad,\quad C=Ln\,k$$

Aplicar: $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}$, donde $u=1-x^2$
$du=-2x\,dx$

$$\Rightarrow\quad\frac{1}{-2}\cdot\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-Ln|y+\sqrt{y^2-1}|=Ln\,k$$

$$\Rightarrow\quad-\sqrt{1-x^2}-Ln|y+\sqrt{y^2-1}|=Ln\,k$$

$$\Rightarrow\quad-\sqrt{1-x^2}=Ln\,k(y+\sqrt{y^2-1})$$

$$\Rightarrow\quad K(y+\sqrt{y^2-1})=e^{-\sqrt{1-x^2}}$$

Problema 21 Resolver: $e^{x^3-y^2}+\frac{y}{x^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$

Solución:

1) $$e^{x^3}e^{-y^2}+\frac{y}{x^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$e^{x^3}e^{-y^2}dx+\frac{y}{x^2}dy=0$$

2) Agrupar los términos en x junto a dx, también agrupar los términos en y junto a dy.

Veamos : $x^2 e^{x^3} dx + \frac{y}{e^{-y^2}} dy = 0$

$$x^2 e^{x^3} dx + y e^{y^2} dy = 0$$

3) Integrar cada término:

$$\int x^2 e^{x^3} dx + \int y e^{y^2} dy = C$$

$u = x^3$, $du = 3x^2\,dx$ $\qquad$ $u = y^2$, $du = 2y\,dy$ $\qquad$ ***Aplicar:*** $\int e^u du = e^u$

$$\tfrac{1}{3} e^{x^3} + \tfrac{1}{2} e^{y^2} = C$$

m.c.m. = 6

$\Longleftrightarrow \quad 2e^{x^3} + 3e^{y^2} = 6C$, haciendo $6C = k$ obtenemos:

$$2e^{x^3} + 3e^{y^3} = k$$

Problema 22 $\qquad$ Resolver: $e^{x+y} + \frac{y}{x^2}\frac{dy}{dx} = 0$

Solución:

1) $e^x e^y + \frac{y}{x^2}\frac{dy}{dx} = 0$

2) "Agrupar las funciones en x junto a dx", del mismo modo "agrupar las funciones en y junto a y".

$$x^2 e^x dx + y e^{-y} dy = 0$$

3) $\int x^2 e^x dx + \int y e^{-y} dy = C$

POR PARTES $\qquad$ *POR PARTES*

$u = x^2$ $\qquad dv = e^x\,dx$ $\qquad\qquad u = y$ $\qquad dv = e^{-y}\,dy$

$du = 2x dx$ $\qquad v = e^x$ $\qquad\qquad du = dy$ $\qquad v = -e^{-y}$

$$\left[x^2e^x - 2\int xe^x dx\right] + \left[-ye^{-y} - \int -e^{-y}dy\right] = c$$

$$x^2e^x - 2\int xe^x dx \quad - \quad ye^{-y} + \int e^{-y}dy = c$$

POR PARTES *ES INMEDIATA*

$u = x$ $dv = e^x\,dx$

$du = dx$ $v = e^x$

$$x^2\,e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) - ye^{-y} + (-e^{-y}) = C$$

$$x^2\,e^x - 2xe^x + 2e^x - ye^{-y} - e^{-y} = C$$

$$e^x(x^2 - 2x + 2) - e^{-y}(y+1) = C$$

Problema 23 Resolver: $\frac{ds}{dt} + \cos 2t = 0$

Solución:

1) $ds + \cos 2t\, dt = 0$

2) $\int ds + \int \cos 2t\, dt = C$

$$s + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t = C$$

$\Rightarrow \quad 2s + \operatorname{sen} 2t = 2C \;,\; 2C = k.$

$\Rightarrow \quad 2s + \operatorname{sen} 2t = K$

Problema 24 Resolver: $xy\,dx + \sqrt{1+x^2}\,dy = 0 \;;\; y = 1$ cuando $x = 0$

Condición inicial

Solución:

1) Agrupar: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \frac{1}{y}\,dy = 0$

2) $\int x\underbrace{(1+x^2)}_{2x}{}^{-1/2}\,dx + \int \frac{1}{y}\,dy = k$

$$\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + Ln\,y = Ln\,C$$

$$\sqrt{1+x^2} + Ln\,y = Ln\,C$$

$\Rightarrow \quad Ln\,y - Ln\,C = -\sqrt{1+x^2}$

$\Rightarrow \quad Ln\frac{y}{C} = -\sqrt{1+x^2}$

$\Rightarrow \quad \frac{y}{C} = e^{-\sqrt{1+x^2}}$

$\Rightarrow \quad \boxed{y = Ce^{-\sqrt{1+x^2}}} \qquad (2*)$

3) Imponer la condición inicial $y=1,\ x=0$ que nos servirá para hallar la constante C.

Veamos:

$$1 = Ce^{-\sqrt{1+0}}$$

$$1 = Ce^{-1} \quad \Rightarrow \quad C = e$$

Sustituir en (2*):

$$y = e\,e^{-\sqrt{1+x^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y = e^{-\sqrt{1+x^2}+1}}$$

Problema 25 Resolver: $(y^2 + xy^2)\,y' + x^2 - yx^2 = 0$

Solución:

1) $(y^2 + xy^2)\frac{dy}{dx} + (x^2 - yx^2) = 0$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y^2}}\,(1+x)\,\underline{\underline{dy}} + x^2\,\underline{\underline{(1-y)}}\,dx = 0$

2) Separar: $\frac{y^2}{1-y}dy + \frac{x^2}{1+x}dx = 0$

3) Integrar: $-\int \frac{y^2}{y-1}dy + \int \frac{x^2}{x+1}dx = C$

DIVIDIR DIVIDIR

$$\begin{array}{r|l} y^2 & y-1 \\ \underline{-y^2+y} & y+1 \\ 0\ +y & \\ \underline{-y+1} & \\ 0+\boxed{1} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^2 & x+1 \\ \underline{-x^2-x} & x-1 \\ 0\ -x & \\ \underline{x+1} & \\ 0+\boxed{1} & \end{array}$$

Luego:

$$\Rightarrow\ -\int\left(y+1+\frac{1}{y-1}\right)dy + \int 3\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dy = C$$

$$\Rightarrow\ -\left(\frac{y^2}{2}+y+Ln|y-1|\right)+\frac{x^2}{2}-x+Ln|x+1| = C$$

Hasta aquí, la ecuación *y*a está resuelto. El resto es mera simplificación.

$$\Rightarrow\ \text{m.c.m.} = 2$$

$$\Rightarrow\ -\underline{\underline{y^2}}-\underline{2y}-2Ln|y-1| + \underline{\underline{x^2}}-\underline{2x}+2Ln|x+1| = 2C$$

$$\Rightarrow\ x^2-y^2-2(x+y)+2Ln\left|\frac{x+1}{y-1}\right| = K \quad , \quad 2c = K$$

$$\Rightarrow\ (x+y)(x-y)-2(x+y)+2Ln\left|\frac{x+1}{y-1}\right| = K$$

$$\Rightarrow\ (x+y)(x-y+2)+2Ln\left|\frac{x+1}{y-1}\right| = K$$

Problema 26 Resolver $e^{-y}(1+y') = 1$

Solución:

1) $e^{-y}\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = 1$

$\Rightarrow \quad e^{-y}\left(\frac{dx+dy}{dx}\right)=1$

$\Rightarrow \quad e^{-y}\,(dx+dy)=dx$

$\Rightarrow \quad \underline{e^{-y}dx}+e^{-y}dy=\underline{dx}$

$\Rightarrow \quad (\underline{e^{-y}-1})\,dx+\underline{e^{-y}}\,\underline{dy}=0$

2) Agrupar adecuadamente:

$\Rightarrow \quad dx+\frac{e^{-y}}{e^{-y}-1}dy=0$

3) Integrar:

$\Rightarrow \quad \int dx+\int\frac{e^{-y}}{e^{-y}-1}dy=C$

Aplicar: $\int\frac{du}{u}=Ln|u|$

$\Rightarrow \quad x-Ln|e^{-y}-1|=Ln\,k \quad , \quad C=Ln\,K$ grande

$\Rightarrow \quad x-Ln|e^{-y}-1|=Ln\,k$

$\Rightarrow \quad x=Ln\,k+Ln|e^{-y}-1|$

$\Rightarrow \quad x=Ln[\,k(e^{-y}-1)\,]$

$\Longleftrightarrow \quad e^{x}=k\,|e^{y}-1|$

$\Longleftrightarrow \quad e^{x}=k\,|1-e^{-y}|$

Problema 27 Resolver $y\,Ln\,y\,\underline{dx}+\underline{x}\,dy=0$, $y=1$ cuando $x=0$

Solución:

1) Separar adecuadamente:

$\frac{1}{x}\,dx+\frac{1}{y\,Ln\,y}\,dy=0$

2) Integrar: $\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1/y}{Ln\,y}dy = C$, hacer $C = Lnk$

$\Rightarrow Ln\,|x| + Ln\,(Ln\,y) = Ln\,K$

$\Rightarrow Ln\,(x\ \ Ln\ \ y) = Ln\,K$

3) Antilogaritmo: $x\,Ln\,y = K$ .... (3∗)

$\Rightarrow \quad Lny = \frac{K}{X}$

Antilogaritmo: $\boxed{y = e^{k/x}}$ Solución general

4) Aplicando la condición inicial $y = 1$ cuando $x = 0$ en (3∗)

$\Rightarrow (0)\,Ln\,(1) = K$

$\Rightarrow \quad (0)\,(0) = K \quad \Rightarrow \quad \boxed{K = 0}$

5) Por tanto: $x \cdot Ln\,y = 0$

Problema 28

Resolver $(1 + y^2)\,(e^{2x}dx - e^{y}dy) - (1 + y)dy = 0$

Solución:

1) Multiplicar : $e^{2x}\,dx - e^{y}dy + y^2\,e^{2x}dx - y^2\,e^{y}dy - (1 + y)\,dy = 0$

2) Asociar : $e^{2x}\,(1 + y^2)\,dx + (-e^{y} - y^2\,e^{y} - 1 - y)\,dy = 0$

$\Rightarrow \quad e^{2x}\,(1 + y^2)\,dx - [\,e^{y}\,(1 + y^2) + (y + 1)\,]\,dy = 0$

3) Separar : $e^{2x}dx - \left[\frac{e^{y}(1 + y^2)}{1 + y^2} + \frac{y + 1}{1 + y^2}\right]dy = 0$

$\Rightarrow \quad e^{2x}dx - \left[e^{y} + \frac{y}{1 + y^2} + \frac{1}{1 + y^2}\right]dy = 0$

4) Integrar : $\int e^{2x}dx - \int e^{y}dx - \int \frac{y}{1 + y^2} - \int \frac{1}{1 + y^2}dy = C$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}e^{2x} - e^{y} - \tfrac{1}{2}Ln(1+y^2) - \operatorname{arctg} y = C \quad , \quad K = 2C$$

$$\Rightarrow \quad e^{2x} - 2e^{y} - Ln(1+y^2) - 2\operatorname{arctg} y = K$$

Problema 29

Resolver $(xy^2 - y^2 + x - 1)\,dx + (\underline{x^2 y} + \underline{\underline{2xy}} + \underline{x^2} + \underline{\underline{2y}} + \underline{\underline{2x}} + \underline{\underline{2}})\,dy = 0$

Solución:

1) Factorizar por agrupamiento:

$$[\,y^2(x-1) + (x-1)\,]\,dx + [\,x^2(y+1) + 2x(y+1) + 2(y+1)\,]\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{(x-1)}\,(y^2+1)\,\underline{dx} + (y+1)\,(x^2+2x+2)\,dy = 0$$

2) Separar : $\dfrac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx + \dfrac{y+1}{y^2+1}\,dy = 0$

3) Integrar : $\underbrace{\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\displaystyle\int \frac{y+1}{y^2+1}\,dy}_{I_2} = C$

Cálculo de I_1 :

Probemos, en primer lugar, si es posible aplicar la fórmula $\displaystyle\int \frac{du}{u} = Ln|u|$

Para ello, hagamos: $u = x^2 + 2x + 2$

$du = (2x+2)\,dx$

Como podemos apreciar en I_1, en el numerador tenemos:

$x - 1 = \tfrac{1}{2}(2x-2)$ ← *multiplicar y dividir por 2*

$= \tfrac{1}{2}(2x+2-2-2)$ ← *sumar y restar 2*

$= \tfrac{1}{2}(2x+2) + \tfrac{1}{2}(-4)$

$x - 1 = \tfrac{1}{2}(2x+2) - 2$

Sustituir en I_1 :

$$I_1 = \int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-2}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{2}{x^2+2x+2}\,dx$$

Aplicar: $\int \frac{du}{u} = Ln|u|$ (primera integral) — *completar cuadrados* (segunda integral)

$$= \frac{1}{2} Ln\,(x^2+2x+2) - \int \frac{2}{x^2+2x+1-1+2}\,dx$$

$$I_1 = \frac{1}{2} Ln\,(x+2x+2) - 2\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx$$

$$I_1 = \frac{1}{2} Ln\,(x+2x+2) - 2\,\text{arctg}\,(x+1)$$

Cálculo de I_2 :

$$I_2 = \int \frac{y+1}{y^2+1}\,dy = \int \frac{y}{y^2+1}\,dy + \int \frac{1}{y^2+1}\,dy$$

$$I_2 = \frac{1}{2} Ln(y^2+1) + \text{arctg}\, y$$

Sustituir I_1 y I_2 en el tercer paso: $I_1 + I_2 = C$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} Ln(x^2+2x+2) - 2\,\text{arctg}(x+1) + \frac{1}{2} Ln(y^2+1) + \text{arctg}\, y = C$$

$$\Rightarrow Ln(x^2+2x+2) + Ln(y^2+1) - 4\,\text{arctg}(x+1) + 2\,\text{arctg}\, y = \underbrace{C}_{Ln\,K}$$

$$\Rightarrow Ln(x^2+2x+2)(y^2+1) - Ln\,K = 4\,\text{arctg}(x+1) - 2\,\text{arctg}\, y = 2C$$

$$\Rightarrow Ln\left[\frac{(x^2+2x+2)(y^2+1)}{K}\right] = 2[\,2\,\text{arctg}\,(x+1) - \text{arctg}\, y\,]$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2+2x+2)(y^2+1)}{K} = e^{2[\,2\,\text{arctg}(x+1) - \text{arctg}\, y\,]}$$

$$\Rightarrow (x^2+2x+2)(y^2+1) = k\,e^{2[\,2\,\text{arctg}\,(x+1) - \text{arctg}\, y\,]}$$ ■

Problema 30 Resolver $(x^2 y^3 + y + x - 2)\, dx + (x^3 y^2 + x)\, dy = 0$

Solución:

1) En este caso no es posible separar variables.
Hacer la siguiente sustitución:

$xy = t \Rightarrow \boxed{y = \frac{t}{x}}$ —② $\longrightarrow$ $\boxed{dy = \frac{x\,dt - t\,dx}{x^2}}$ —③

4) Sustituir (2) *y* (3) en la ecuación diferencial:

$$\left[x^2 \frac{t^3}{x^3} + \frac{t}{x} + x - 2 \right] dx + \left[x^3 \frac{t^2}{x^2} + x \right]\left[\frac{x\,dt - t\,dx}{x^2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{t^3}{x} + \frac{t}{x} + x - 2 \right] dx + [xt^2 + x]\left[\frac{x\,dt - t\,dx}{x^2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{t^3}{x} + \frac{t}{x} + x - 2 \right] dx + x[t^2 + 1]\left[\frac{x\,dt - t\,dx}{x^2} \right] = 0$$

$m.c.m. = x$

$$\Rightarrow [t^3 + t + x^2 - 2x]\, dx + [t^2 + 1][x\,dt - t\,dx] = 0$$

$$\Rightarrow [t^3 + t + x^2 - 2x]\, \underline{dx} + t^2 x\,dt - t^3\, \underline{dx} + x\,dt - t\, \underline{dx} = 0$$

5) Factorizar *dx* y *dt* : $\Rightarrow [\, t^3 + t + x^2 - 2x - t^3 - t \,]\; dx + [\, t^2 x + x \,]\, dt = 0$

$$\Rightarrow [\, x^2 - 2x \,]\, dx + x\, [\, t^2 + 1 \,]\, dt = 0$$

6) Separar: $\frac{[x^2 - 2x]}{x}\, dx + (t^2 + 1)\, dt = 0 \quad , \quad x \neq 0$

$$\Rightarrow [\, x - 2 \,]\, dx + (t^2 + 1)\, dt = 0$$

7) Integrar: $\int (x-2)dx + \int (t^2 + 1)dt = C$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{t^3}{3} + t = C$$

$m.c.m. = 6$

$$\Rightarrow 3x^2 - 12x + 2t^3 + 6t = 6C$$

8) Como $t = xy \Rightarrow \boxed{3x^2 - 12x + 2x^3y^3 + 6xy = K}$

EJERCICIOS – GRUPO 3

Resolver los siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $(1+y^2)\,dx + xy\,dy = 0$ **Rpta.:** $x^2(1+y^2) = C$

2. $e^y(1+x^2)\,dy - 2x(1+e^y)\,dx$ **Rpta.:** $1+e^y = C(1+x^2)$

3. $(1-y)\,e^y\,y' + \frac{y^2}{x\,Ln\,x} = 0$ **Rpta.:** $C + \frac{e^y}{y} = Ln|Ln\,x|$

4. $(1+y^2)\,dx = \left(y - \sqrt{1+y^2}\right)(1+x^2)^{3/2}\,dy$

Rpta.: $Ln\left(\frac{\sqrt{1+y^2}}{\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|}\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$

5. $(x^2y^2+1)\,dx + 2x^2\,dy = 0$ **Rpta.:** $\frac{1}{1-xy} + \frac{1}{2}Lnx = C$ (hacer $xy = t$)

6. $(1+x^2y^2)\,y + (xy-1)^2\;xy' = 0$, (hacer $xy = t$) **Rpta.:** $Cy^2 = e^{xy - \frac{1}{xy}}$

7. $(x^6 - 2x^5\,2x^4 - y^3 + 4x^2y)\,dx + (xy^2 - 4x^3)\,dy = 0$ (hacer $y = tx$)

Rpta.: $\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + \frac{y^3}{3x^3} - \frac{4y}{x} = C$

8. $(xy + 2xy\,Ln^2 y + y\,Ln\,y)\,dx + (2x^2\,Ln\,y + x)\,dy = 0$

(hacer $x\,Ln\,y = t$) **Rpta.:** $2x^2 + (2x\,Lny + 1)^2 = C$

9. $(a^2+y^2)\,dx + 2x\sqrt{ax - x^2}\,dy = 0$, si $y = 0$ cuando $x = 0$

Rpta.: $t = a\,\text{tg}\sqrt{\frac{a}{x} - 1}$

10. $\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho^2-1}{\rho^2+1}\,\text{tg}\,\theta$

11. $\frac{1}{xy}\,dx + \frac{e^{y^2}}{x^3-1}\,dy = 0$, $y = 0$ cuando $x = 1$

Rpta.: $2x^3 - 6Ln\,x + 3\,e^{y^2} - 5 = 0$

2.2.2 Ecuaciones Diferenciales Exactas

Definición

Una ecuación diferencial de la forma $M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = 0$, se dice que es ecuación diferencial **EXACTA** si cumple la condición necesaria y suficiente que: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Ejemplo: Sea la ecuación diferencial

$$\underbrace{x\,(2x^2+y^2)}_{M}\,dx + \underbrace{y\,(x^2+2y^2)}_{N}\,dy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (*)$$

donde:

$$M = x\,(2x^2+y^2)$$

$$M = 2x^3 + xy^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = x\,(2y) = 2xy$$

$$N = y\,(x^2+2y^2)$$

$$N = yx^2 + 2y^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y\,(2x) = 2xy$$

Como vemos: $\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial N}{\partial x}$

Luego la **ECUACIÓN DIFERENCIAL** escrito en $(*)$ es exacta.

Ahora surge la pregunta: ¿Cómo resolver una ecuación diferencial exacta?

Para resolver una ecuación diferencial exacta, existe por lo menos tres maneras o métodos:

MÉTODO I Resolver $M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = 0$ si se sabe que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Solución:

1) Supongamos que la solución sea:

$$F(x,y) = \int M\ dx + f(y)$$

Estamos integrando $M\ (x,y)$ con respecto a "x" más una constante de integración $C = f(y)$

(1*) $\boxed{F\ (x\ ,y) = G\,(x,y) + f(y)}$

Ahora, nuestro objetivo es hallar $f(y) = ?$

Para ello, hacemos:

2) Derivar $F(x,y)$ con respecto a y : $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{df}{dy}$

3) Igualar $\frac{\partial F}{\partial y}$ con N: $\frac{\partial G}{dy} + \frac{\partial f}{\partial y} = N$

$$\Rightarrow \quad \frac{df}{dy} = N - \frac{\partial G}{\partial y}$$

4) Integrando con respecto a "y" obtengo $f(y)$:

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(y) = \int \left[N - \frac{\partial G}{\partial y} \right] dy} \quad (4*)$$

5) Sustituyendo: $(4*)$ en $(1*)$

Habremos encontrado la solución general de la forma:

$$\boxed{F(x,y) = G(x,y) + f(y) = C}$$

Pues $F(x,y) = C$

Observación: Tener en cuenta que si $F(x,y) = C$, entonces el diferencial **TOTAL** es:

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{} \cdot dx + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}}_{} \cdot dy = 0$$

$$M(x,y) \cdot dx + N(x,y)\ dy = 0 \longleftarrow$$ *que es la Ecuación Diferencial que teníamos inicialmente.*

Observación: La solución se puede obtener también, integrando primero con respecto a "y", puesto que de:

$$M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = 0$$

obtenemos: $M(x,y)\ dx = -N(x,y)\ dy$

que al integrar ambos miembros, resulta:

$$\int M(x,y)\, dx = -\int N(x,y)\, dy$$

Problema 31 Resolver $x(2x^2+y^2)+y(x^2+2y^2)y'=0$

Solución:

En primer lugar probaremos si es o no una ECUACIÓN DIFERENCIAL EXACTA.

Veamos:

De la Ecuación Diferencial dada, obtenemos:

$$x\,(2x^2+y^2)+y\,(x^2+2y^2)\,\frac{dy}{dx}=0$$

o lo que es lo mismo: $\underbrace{(2x^3+xy^2)}_{M}\,dx+\underbrace{(x^2y+2y^3)}_{N}\,dy=0$

Donde : $\frac{\partial M}{\partial y}=2xy$

$\frac{\partial N}{\partial x}=2xy$

son iguales, por tanto es una ecuación diferencial exacta.

Ahora, resolvamos la ecuación diferencial siguiendo el orden dado por el método I.

Veamos:

1) Supongamos que la solución sea:

$$F(x,y)=\int M\,dx+f(y)$$

$$=\int(2x^3+xy^2)dx+f(y)$$

$$=2\frac{x^4}{4}+y^2\cdot\frac{x^2}{2}+f(y)$$

$$F(x,y)=\frac{x^4}{2}+\frac{1}{2}x^2y^2+f(y)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1*)$$

Ahora, nuestro problema es hallar $f(y)=?$

2) Derivar F con respecto a y :

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0+\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot 2y+\frac{d}{dy}f(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2y+\frac{d}{dy}f(y)$$

3) Igualar $\frac{\partial F}{\partial y}$ con N:

$$x^2 y + \frac{d}{dy} f(y) = x^2 y + 2y^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dy} f(y) = 2y^3$$

4) Integrar con respecto a y:

$$\Rightarrow \quad f(y) = \int 2y^3 dy$$

$$f(y) = 2 \cdot \frac{y^4}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(y) = \tfrac{1}{2} \cdot y^4} \quad (4*)$$

5) Sustituir (4∗) en (1∗): $F(x,y) = \frac{x^4}{2} + \frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{2} y^4$

Así, habremos encontrado la solución general: $\frac{x^4}{2} + \frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{2} y^4 = C$

o lo que es lo mismo: $x^4 + x^2 y^2 + y^4 = k$, $k = 2C$.

MÉTODO II

Si la Ecuación Diferencial de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es una Ecuación diferencial exacta, entonces se cumple que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ y la solución general de la forma $F(x,y) = C$, se puede hallar integrando directamente la ecuación diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, de la siguiente manera:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = C}$$

Problema 32 Resolver $\underbrace{(3x^2 + 6xy^2)}_{M}\, dx + \underbrace{(6x^2 y + 4y^3)}_{N}\, dy = 0$

Solución:

Probemos en primer lugar, si es una ecuación diferencial exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12\,xy$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 12\,xy$$

→ *son iguales, por tanto, sí es* EXACTA.

Ahora, integremos directamente, haciendo $x = x_0$ en $N(x, y)$

Así, tendremos:

$$\int_{x_0}^{x} (3x^2 + 6xy^2)\, dx + \int_{y_0}^{y} (6\,x_0^2\, y + 4y^3)\, dy = C_1$$

$$\Rightarrow \quad 3\frac{x^3}{3} + 6y^2\frac{x^2}{2}\Bigg]_{x=x_0}^{x=x} + 6x_0^2\,\frac{y^2}{2} + 4\frac{y^4}{4}\Bigg]_{y=y_0}^{y=y} = C_1$$

$$\Rightarrow \quad [x^3 + 3y^2x^2 - (x_0^3 + 3y^2x_0^2)] + [3x_0^2y^2 + y^4 - (3x_0^2\,y_0^2 + y_0^4)] = C_1$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x^3} + \underline{3y^2x^2} - x_0^3 - \cancel{3y^2x_0^2} + \cancel{3x_0^2y^2} + \underline{y^4} - 3x_0^2\,y_0^2 - y_0^4 = C_1$$

$$\Rightarrow \quad x^3 + 3y^2x^2 + y^4 = \underbrace{x_0^3 + 3x_0^2\,y_0^2 + y_0^4 + C_1}_{C}$$

$$\Rightarrow x^3 + 3y^2 \quad x^2 + y^4 = C$$

MÉTODO III Por simple inspección.

Si ya se ha probado que la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)\, dy = 0$ es una **ECUACIÓN DIFERENCIAL EXACTA**, el presente método consiste en asociar los términos de la ecuación de una manera adecuada, de tal modo que cada asociación que hagamos sea una **DIFERENCIAL CONOCIDA.**

Las diferenciales conocidas son:

a) La de un producto : $d(uv) = u\,dv + v\,du$

b) La de un cociente : $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

c) La de una potencia : $d(u^n) = nu^{n-1}\,du$

d) La de una suma : $d(u+v) = du + dv$

e) La de un logaritmo natural : $d(Ln\,u) = \frac{du}{u}$

⋮

etc.

Ejemplo Resolver: $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$

Resolución:

1° Asociar los términos : $3x^2dx$ con $4y^3dy$

Después los términos : $6xy^2dx$ con $6x^2y$.

Así tendremos: $\underbrace{(3x^2dx + 4y^3dy)}_{d[x^3+y^4]} + \underbrace{(6xy^2dx + 6x^2ydy)}_{d[3y^2x^2]} = 0$

$$d[x^3 + y^4] + d[3y^2x^2] = 0$$

$d[x^3+y^4]$: es el diferencial de la suma de x^3 con y^4.

$d[3y^2x^2]$: es el diferencial del producto de 3 por y^2 por x^2.

al integrar directamente, obtenemos:

$$\int d[x^3 + y^4] + \int d[3y^2x^2] = \int 0$$

$$x^3 + y^4 + 3y^2x^2 = C$$

NOTA:

Si la ecuación diferencial:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

no es exacta y quisiéramos convertirla en exacta, entonces debemos hallar una función $u(x,y)$ que la llamaremos factor integrante. Al multiplicar $u(x,y)$ por cada término de la ecuación (1), obtenemos:

$$u(x,y)\,P(x,y) + u(x,y)\,Q(x,y) = 0$$

que es exacta. A continuación explicamos. Cómo hallar el factor integrante.

Proposición Considere la ecuación:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

donde M, N, tiene primeras derivadas parciales continuas en cierto rectángulo R. Demuestre que una función $u(x,y)$ definida en R, que tenga allí primeras derivadas parciales continuas, es un factor integrante de dicha ecuación si, y sólo sí.

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{\partial u}{\partial x}-M\frac{\partial u}{\partial y} \text{ en } R.$$

Demostración:

Paso 1. Suponer que la solución de (1) es la relación $F(x,y)=C$, ……….. (2) donde C es constante.

Paso 2. Hallar el diferencial total en (2):

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot dy=0$$

Paso 3. Con (1) y (2) formamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$M\cdot dx+N\cdot dy=0$$

$$F_x\cdot dy+F_y\cdot dy=0 \text{, donde } F_x=\frac{\partial F}{\partial x},\ F_y=\frac{\partial F}{\partial y}$$

En este sistema se cumple que el determinante

$$\begin{vmatrix} M & N \\ F_x & F_y \end{vmatrix}=0$$

Si fuera diferente de cero, tendríamos que $(dx,dy)=(0,0)$, lo cual es absurdo.

Por ser cero el determinante, afirmamos que la segunda fila es proporcional a la primera fila. Supongamos que la función $u(x,y)$ sea el factor de proporcionalidad, así tendremos:

$$\begin{cases} F_x=u(x,y)\cdot M(x,y) \\ F_y=u(x,y)\cdot N(x,y) \end{cases}$$

La función $u(x,y)$ se llama **FACTOR INTEGRANTE**.

Paso 4. Al multiplicar la ecuación (1) por $u(x,y)$ obtenemos:

$$\underbrace{u(x,y)\cdot M(x,y)dx}_{F_x}+\underbrace{u(x,y)\cdot N(x,y)}_{F_y}=0 \quad \text{.............................. (3)}$$

La ecuación diferencial obtenida en (3) es **EXACTA**, (se justifica por los pasos 1 y 2), por lo tanto se cumple:

$$\frac{\partial}{\partial y}[u\cdot M] = \frac{\partial}{\partial x}[y\cdot N] = 0$$

al derivar: al derivar:

$$u\cdot\frac{\partial M}{\partial y}+M\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = u\cdot\frac{\partial N}{\partial x}+N\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

Asociando los términos en u, obtenemos:

$$u\cdot\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-M\cdot\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{.............................. (4)}$$

lqqd

Consecuencias:

Paso 5. Al multiplicar la ecuación en (3) por $\frac{1}{u}$ obtenemos:

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N\cdot\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{u}-M\cdot\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{u} \quad \text{..............................(5)}$$

En (4) puede ocurrir sólo una de las siguientes situaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad \vee \quad \frac{\partial u}{\partial x}=0$$

a) Cuando $\frac{\partial u}{\partial y}=0$, la ecuación en (4) es:

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N\cdot\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{u}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N\cdot\frac{d}{dx}(Ln(u))$$

$$\frac{d}{dx}(Ln(u))=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

integrando, obtenemos la función $u(x)$.

b) Cuando $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, la ecuación en (4) es:

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-M\frac{\frac{du}{dy}}{u}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-M\frac{d}{dy}(Ln(u))$$

$$\frac{d}{dy}(Ln(u))=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

integrando, obtenemos la función $u(y)$.

Observación:

El factor integrante u no es en modo alguno ÚNICO, en realidad existen infinitos factores integrantes.

El acierto de encontrar el factor integrante por simple inspección depende en buena parte de la ***intuición*** y del entrenamiento, siendo aconsejable retener de memoria las siguientes diferenciales de relaciones muy conocidas en la práctica:

1) $d(xy) = xdy + ydx$

2) $d(x^2 \pm y^2) = 2x\,dx \pm 2y\,dy$

3) $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$

4) $d\left(arc\ \text{tg}\,\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$

5) $d\left(Ln\,\frac{y-x}{y+x}\right) = \frac{2\,x\,dy - 2\,y\,dx}{y^2 + x^2}$

6) $d\left(\frac{y+x}{x-y}\right) = \frac{2\,x\,dy - 2\,y\,dx}{(x-y)^2}$

7) $d\left(\frac{x-y}{x+y}\right) = \frac{2\,y\,dx - 2\,x\,dy}{(x+y)^2}$

Problema 33 Resolver $\underbrace{(2xy^2 - 3y^3)}_{M}\,dx + \underbrace{(7 - 3xy^2)}_{N}\,dy = 0$

Solución:

1) Probaré, en primer lugar, si es exacta o no.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x(2y) - 9y^2 = 4xy - 9y^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 0 - 3y^2\,(1) = -3y^2$$

NO son iguales, entonces NO es EXACTA.

2) ¿Qué hacer? buscar su factor integrante:

Usemos la proposición estudiado anteriormente: Es decir hallar el siguiente cociente:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{(4xy - 9y^2) - (-3y^2)}{7 - 3xy^2} = \frac{4xy - 6y^2}{7 - 3xy^2}$$ ← *NO nos conviene*

o $$\frac{\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}}{-M} = \frac{4xy - 6y^2}{-(2xy^2 - 3y^3)} = \frac{2y\cancel{(2x - 3y)}}{-y^2\cancel{(2x - 3y)}} = \boxed{-\frac{2}{y}} = u(y)$$ ← *conviene*

3) Ahora, como afirma la proposición, hacemos:

$$\frac{d}{dy}Ln(u) = -\frac{2}{y} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d}{dy}Ln\,u = -\frac{2}{y}\,dy$$

$$\Rightarrow \quad Ln\,u = -2\,Ln\,y$$

$$\Rightarrow \quad Ln\,u = Ln\,y^{-2} \Rightarrow \boxed{u = y^{-2}} \longleftarrow$$ *es el factor integrante*

4) Multiplicar a la ecuación diferencial original por $y^{-2} = \frac{1}{y^2}$ obtenemos:

$$\frac{(2xy^2 - 3y^3)}{y^2}dx + \frac{(7 - 3xy^2)}{y^2}dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2x - 3y)dx + \left(\frac{7}{y^2} - 3x\right)dy = 0$$

5) Ahora, sí es exacta.

6) Asociemos adecuadamente en diferenciales para integrar:

$$\Rightarrow \quad 2xdx - \underline{3ydx} + \frac{7}{y^2}dy - \underline{3x\,dy} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2xdx + \frac{7}{y^2}dy - 3(ydx + x\,dy) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2xdx + \frac{7}{y^2}dy - 3d(yx) = 0$$

7) Integrar: $\quad 2\frac{x^2}{2} + 7\frac{y^{-1}}{-1} - 3yx = C$

$$\Rightarrow \quad x^2 - \frac{7}{y} - 3yx = C$$

Problema 34 Resolver $\underbrace{(2x^2y + 2y + 5)}_{M}\,dx + \underbrace{(2x^3 + 2x)}_{N}\,dy = 0$

Solución:

1) Probemos, en primer lugar, si es exacta:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2x^2 + 2 \\[2ex] \dfrac{\partial N}{\partial x} = 6x^2 + 2 \end{array}\right] \textit{NO es exacta.}$$

2) Busquemos el factor integrante para convertirla en exacta.

Hagamos : $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\dfrac{(2x^2+2)-(6x^2+2)}{2x^3+2x}=\dfrac{-4x^2}{2x^3+2x}=\dfrac{-4x^2}{2x(x^2+1)}=\dfrac{-2x}{x^2+1}$

Pero : $\frac{d}{dx}Ln\,u=\dfrac{-2x}{x^2+1}$

integrando : $Ln\,u=-Ln\,|x^2+1| \;\Rightarrow\; Ln u = Ln\,(x^2+1)^{-1}$

$\Rightarrow\; u=(x^2+1)^{-1}=\dfrac{1}{x^2+1}$ ← *Factor integrante*

3) Multiplicar por $\frac{1}{x^2+1}$ en la ecuación diferencial original:

$\dfrac{(2x^2y+2y+5)}{x^2+1}dx+\dfrac{(2x^3+2x)}{x^2+1}dy=0$. Ahora, si es exacta.

4) Asociemos adecuadamente, para poder integrar directamente:

$$\frac{2y(x^2+1)+5}{x^2+1}dx+2x\frac{(x^2+1)}{x^2+1}dy=0$$

$$\Rightarrow\; \left(2y+\frac{5}{x^2+1}\right)dx+2x\,dy=0$$

$$\Rightarrow\; \frac{5}{x^2+1}dx+2y\,dx+2x\,dy=0$$

$$\Rightarrow\; \frac{5}{x^2+1}dx+2\,(y\,dx+x\,dy)=0$$

$$\Rightarrow\; \frac{5}{x^2+1}dx+2\,d\,(yx)=0$$

5) Integrar: $\displaystyle\int\frac{5}{x^2+1}dx + \int 2d(yx)=C$

$\Rightarrow\; 5\text{arctg}\,x \;+\; 2yx \;=C$

Problema 35 Resolver $\underbrace{(x+y^2)}_{M}dx-\underbrace{2xy}_{N}dy=0$

Solución:

1) Probemos, en primer lugar, si es exacta o no.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2y$$

*son diferentes, entonces **NO ES EXACTA**.*

2) Busquemos el ***factor integrante*** para convertirla en **EXACTA**.

Hallemos: $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \dfrac{2y-(-2y)}{-2xy} = \dfrac{4y}{-2xy} = \boxed{\dfrac{-2}{x}}$

3) Pero $\frac{d}{dx} Lnu = -\frac{2}{x} \Rightarrow$ Integrar: $Lnu = \int -\frac{2}{x}dx = -2\,Lnx$

$$\Rightarrow Ln\,u = Ln\,x^{-2}$$

$$\Rightarrow u = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$ *Es el Factor integrante*

4) Ahora, multiplicar la Ecuación Diferencial originada por $\frac{1}{x^2}$

$\left(\dfrac{x+y^2}{x^2}\right)dx - \dfrac{2xy}{x^2}dy = 0$, ésta Ecuación diferencial ya es **EXACTA**.

5) Ahora, asociemos los términos que nos permitan integrar rápidamente.

$$\frac{x}{x^2}dx + \frac{y^2}{x^2}dx - \frac{2y}{x}dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x}dx + \frac{y^2dx - 2yx\,dx}{x^2} = 0$$

mejor hacer : $\dfrac{1}{x}dx - \dfrac{2xy\,dy - y^2dx}{x^2} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x}dx - d\left(\frac{y^2}{x}\right) = 0$$

6) Integrar: $\int \frac{1}{x}dx - \int d\left(\frac{y^2}{x}\right) = C$

$$\Rightarrow \quad Ln|x| - \frac{y^2}{x} = C$$

$$\Rightarrow \quad x\,Ln|x| - y^2 = Cx$$

Problema 36 Resolver $\underbrace{(x^4 Lnx - 2xy^3)}_{M} dx + \underbrace{3x^2 y^2}_{N} dy = 0$

Solución:

1) Probemos, si es EXACTA o NO:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -6xy^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2$$

no son iguales, NO ES EXACTA.

2) Busquemos un FACTOR INTEGRANTE.

Hagamos: $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \dfrac{-6xy^2 - 6xy^2}{3x^2y^2} = \dfrac{-12xy^2}{3x^2y^2} = \dfrac{-4}{x}$

3) Pero : $\frac{d}{dx} Ln\, u = -\frac{4}{x}$

Integrar : $\int \frac{d}{dx} Ln\, u = \int -\frac{4}{x}$

$\Rightarrow \quad Ln\, u = -4\, Ln\, x$

$\Rightarrow \quad Ln\, u = Ln\, x^{-4} \quad \Rightarrow \quad u = x^{-4} = \frac{1}{x^4} \longleftarrow$ *Es el FACTOR INTEGRANTE*

4) Multiplicar la ecuación original por el FACTOR INTEGRANTE:

$$\frac{(x^4 Ln\, x - 2xy^3)}{x^4} dx + \frac{3x^2y^2}{x^4} dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad Ln\, x\, dx - \frac{2xy^3}{x^4} dx + \frac{3x^2y^2}{x^4} dy = 0$$

5) Asociar adecuadamente, de modo que los términos asociados sea de fácil integración:

Veamos:

$$Ln\, x\, dx + \frac{3x^2y^2dy - 2xy^3dx}{x^4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad Ln\, x\, dx + d\left(\frac{y^3}{x^2}\right) = 0$$

6) Integrar:

$$\int Ln\,x\,dx + \int d\left(\frac{y^3}{x^2}\right) = C$$

$$\Rightarrow \int Ln\,x\,dx + \frac{y^3}{x^2} = C$$

$$\Rightarrow x\,(Ln\,x - 1) + \frac{y^3}{x^2} = C$$

$$\Rightarrow x^3\,(Ln\,x - 1) + y^3 = C\,x^2$$

Donde $I_1 = \int Lnx\,dx$

se integra por partes:

$u = Ln\,x \quad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}dx \quad v = x$

Luego: $I_1 = xLnx - \int x\frac{1}{x}dx$

$I_1 = xLnx - \int dx$

$I_1 = xLnx - x = x\,(Lnx - 1)$

Problema 37 Resolver $\underbrace{(x^2 + y^2 + 1)}_{M}\,dx - \underbrace{2\,xy}_{N}\,dy = 0$

Solución:

1) Probemos, primeramente si la ecuación es EXACTA O NO:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2y$$

No son iguales, NO ES EXACTA.

2) Busquemos un FACTOR INTEGRANTE.

Hagamos: $$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y - (-2y)}{-2xy} = \frac{4y}{-2xy} = \frac{-2}{x}$$

3) Pero: $\frac{d}{dx}Ln\,u = \frac{-2}{x}$

Integrar: $Ln\,u = -2Ln\,x \Rightarrow Ln\,u = Ln\,x^{-2} \Rightarrow u = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ ⟵ *Es el FACTOR INTEGRANTE*

4) Multiplicar a la Ecuación Diferencial original por el factor integrante:

$$\frac{(x^2 + y^2 + 1)}{x^2}dx - \frac{2xy}{x^2}dy = 0$$

5) Asociar los términos adecuadamente, para integrar:

$$\frac{x^2}{x^2}dx + \frac{y^2}{x^2}dx + \frac{1}{x^2}dx - \frac{2xy}{x^2}dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad dx + \frac{1}{x^2}dx + \frac{y^2 dx - 2xy\,dy}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad dx + \frac{1}{x^2}dx - \frac{2xy\,dy - y^2\,dx}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad dx + \frac{1}{x^2}dx - d\left(\frac{y^2}{x}\right) = 0$$

6) Integrar: $\int dx + \int \frac{1}{x^2}dx - \int d\left(\frac{y^2}{x}\right) = C$

$$\Rightarrow \quad x + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \frac{y^2}{x} = C$$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{1}{x} - \frac{y^2}{x} = C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x^2 - 1 - y^2 = xC}$$

$$\Rightarrow \quad y^2 - x^2 + 1 = KX \quad , \quad K = -C$$

2.2.2.1 Resolución Práctica

Cuando el lector tiene cierta práctica en el proceso de resolución y conoce algunas diferenciales, entonces pude proceder en multiplicar el factor integrante que hace falta.

Problema 38 Resolver $\underbrace{(x + 2y)}_{M}dx + \underbrace{(y - 2x)}_{N}dy = 0$

Solución:

1) Probaremos, si es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2$$

$\neq s \Rightarrow$ *NO ES EXACTA*

2) Asociemos adecuadamente: De $(x+2y)\,dx+(y-2x)\,dy=0$

$$\Rightarrow \quad (x\,dx+y\,dy)+2\,(y\,dx-x\,dy)=0$$

3) Multiplicar por $\dfrac{1}{x^2+y^2}$

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}+2\,\frac{(ydx-xdy)}{x^2+y^2}=0$$

4) *Multiplicar y dividir por 2* (primer término); *Dividir por y^2 numerador y denominador* (segundo término)

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left[\frac{2x\,dx+2y\,dy}{x^2+y^2}\right]+2\left[\frac{\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}d(Ln(x^2+y^2))+2d\left[\operatorname{arctg}\tfrac{x}{y}\right]=0$$

5) Integrar: $\frac{1}{2}\int d[Ln(x^2+y^2)]+2\int d\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right]=C$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}Ln(x^2+y^2)+2\operatorname{arctg}\tfrac{x}{y}=C$$

$$\Rightarrow \quad Ln(x^2+y^2)+4\operatorname{arctg}\tfrac{x}{y}=2C$$

$$\Rightarrow \quad Ln(x^2+y^2)+4\operatorname{arctg}\tfrac{x}{y}=C_1$$

El término: $u(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ es el factor de integración.

Problema 39 Resolver $\underbrace{(y^2-xy)}_{M}\,dx+\underbrace{x^2}_{N}\,dy=0$

Solución:

1) En primer lugar, probaremos si es EXACTA o NO.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y-x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=2x$$

*son diferentes, luego **NO** es exacto.*

2) Si multiplicamos a la Ecuación Diferencial por el término $\frac{1}{xy^2}$ obtenemos:

$$\left(\frac{y^2-xy}{xy^2}\right)dx+\frac{x^2}{xy^2}dy=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{y^2}{xy^2}-\frac{xy}{xy^2}\right)dx+\frac{x}{y^2}dy=0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}_{M}dx+\underbrace{\frac{x}{y^2}}_{N}dy=0 \ldots\ldots\ldots (2*)$$

3) Ahora, nuevamente probemos, si es o no EXACTA.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=0-\left(-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{1}{y^2}$$

son iguales, luego es exacta.

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{y^2}$$

4) Ya estamos en posibilidades de asociar adecuadamente los términos de la ecuación diferencial obtenido en (2∗), de la siguiente manera:

$$\frac{1}{x}dx-\frac{1}{y}dx+\frac{x}{y^2}dy=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x}dx+\frac{-ydx+xdy}{y^2}=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x}dx-\frac{ydx-xdy}{y^2}=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x}dx-d\left(\frac{x}{y}\right)=0$$

5) Integremos directamente:

$$\int \frac{1}{x}dx - \int d\left(\frac{x}{y}\right) = C$$

$\Rightarrow$ $$Ln|x| - \frac{x}{y} = C$$

o $$Ln|x| - \frac{x}{y} = Ln k \quad , \quad C = Ln\, k$$

o $$Ln|x| - Ln k = \frac{x}{y}$$

o $$Ln\frac{x}{k} = \frac{x}{y}$$

o $$\frac{x}{k} = e^{x/y} \quad \Rightarrow \quad x = ke^{x/y}$$

Problema 40 Resolver: $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$

Sea $M = x + y$, se obtiene $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$

son iguales

Sea $N = x + 2y$, se obtiene $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$

- Ahora, asociemos los términos adecuadamente para formar diferenciales que sean sencillos de integrar.

  Hacer:
$$x dx + \underline{y dx} + \underline{x dy} + 2y\,dy = 0$$
$$\underbrace{(y dx + x \cdot dy)}_{d(y \cdot x)} + x dx + 2y dy = 0$$
$$d(y \cdot x) + x dx + 2y dy = 0$$

- Integrar
$$\int d(y \cdot x) + \int x\,dx + \int 2y\,dy = \int 0$$
$$yx + \frac{x^2}{2} + y^2 = C$$

PROBLEMAS GRUPO 3

I. Para cada una de las siguientes Ecuaciones diferenciales siguientes, hállese un factor integrante y obténgase la solución:

1. $\frac{1}{x}(2x - y^3)\,dx - 3y^2 dy = 0$

2. $(x^2 + y^2)\,dx = x\,(x\,dy - y\,dx)$

3. $(x^2y + xy^2 - y^3)\,dx + (y^2x + yx^2 - x^3)\,dy = 0$

4. $(x^2y - y)\,dx + (x^2 - 2x + y)\,dy = 0$

5. $\sqrt{x^2 + y^2} - x + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - y\right)\frac{dy}{dx} = 0$

II.

6. Si $M \equiv y f(xy)$ y $N \equiv x g(xy)$ siendo f y g funciones del producto xy, pruébese que $1/(M_x - N_y)$ es un factor integrante con tal que $Mx - Ny \neq 0$.

7. Si las funciones M y N son no de la forma indicada en el ejercicio 6, pero $M_x - N_y$ es idénticamente nula, obténgase un factor integrante.

8. Compruébese que la sustitución $v = xy\left(y = \frac{v}{x}\right)$ reduce la ecuación del ejercicio 6 a una ecuación en x y v en la que las variables son separables.

9. Pruébese que la ecuación de la forma $x^r y^s\,(my\,dx + nx\,dy) = 0$ tiene infinitos factores integrantes de la forma $x^a y^b$, y obténgase las expresiones de a y b.

10. Si $(M_y - N_x / N \equiv f(x)$ es solamente función de x, pruébese que $e^{\int f(x)dx}$ es un factor integrante de $Mdx + Ndy = 0$.

III. Resolver cada uno de las siguientes ecuaciones diferenciales.

11. $(y - xy^2)\,dx + (3x - x^2y)\,dy = 0$

12. $y\,(1 + 2xy - x^2y^2)\,dx + x\,(1 + 2xy)\,dy = 0$

13. $(y - xy^2 + x^{3/2})\, dx + x\,(1 + xy - 2x^{3/2}\, y^{3/2})\, dy = 0$

14. $(y - xy^2 + \text{sen}\, xy)\, dx + \ (4x - x^2\, y\, sen\, xy)\, dy = 0$

15. $(xy^2 - x)\, dx + x\,(xy - 1)\, dy = 0$

16. Resolver la ecuación diferencial 12 efectuando la sustitución $v = xy$.

17. $(2y - xy^2 - x^2\, y^3)\, dx + (2x - x^2\, y)\, dy = 0$. (Hacer $v = xy$).

18. Resuélvase el ejercicio 14 por la sustitución $v = xy$.

19. $x^4\, y\,(3y\, dx + 2x\, dy) - x\ \ (y\, dx - 2x\, dy) = 0.$

20. $y^2\,(3ydx - 2y)\, dx + (x - 2x^4)\, dy = 0.$

IV. Resolver las siguientes ecuaciones, hallando su factor integrante:

21. $(1 - x^2\, y)\, dx + x^2\,(y - x)\, dy = 0 \quad , \quad u = \varphi\,(x)$

22. $(3x^2y + y^3)\, dx + (x^3 + 3xy^2)\, dy = 0.$

23. $x\, dx + y\, dy + x\,(x\, dy - y\, dx) = 0 \quad , \quad u = \varphi\,(x^2 + y^2)$

24. $(x^2 + y)\, dx - x\, dy = 0 \quad , \quad u = \varphi\,(x)$

25. $(x + sen\, x + sen\, y)\, dx + \cos y\, dy = 0 \quad , \quad u = \varphi\,(x)$

26. $(3y^2 - x)\, dx + (2y^3 - 6\, xy)\, dy = 0 \quad , \quad u = \varphi\,(x + y^2)$

V. Resolver cada uno de las siguientes ecuaciones diferenciales.

27. $(3x^2 - 2x - y)\, dx + (2y - x + 3y^2)\, dy = 0$

28. $\left(\frac{\text{sen}\, 2x}{y} + x\right) dx + \left(y - \frac{\text{sen}^2 x}{y^2}\right) dy = 0$

29. $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sqrt{1+x^2}+x^2-Ln\,x\right)dy=0$

30. $\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=0$

31. $(y\,e^{xy}+2xy)\,dx+(x\,e^{xy}+x^2)\,dy=0$

32. $\cos y\,dx-(x\,seny-y^2)\,dy=0$

33. $2\left(\frac{y}{x^3}-\frac{x}{y^2}\right)dx=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2x^2}{y^3}\right)dy$

34. $(y^2-1)\,dx+(2xy-1)\,dy=0$

35. $\left(3y^3x^2-\frac{1}{x}\right)dx+\left(3y^2x^3+\frac{2}{y}\right)=0$

36. $(x^2+y^2+2xy)dx+2xy\,dy=0$

37. $(x^3-3xy^2+2)dx-(3x^2y-y^2)\,dy=0$

38. $(x\,dx+y\,dy)=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$

39. $\frac{2x\,dx}{y^3}+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$

40. Hallar la integral particular de la ecuación: $(x+e^{\frac{x}{y}})\,dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$ que satisface la a la condición inicial $y(0)=2$.

Resolver las siguientes ecuaciones, que admiten el factor integrante de las formas $u=u(x)$ o $u=u(y)$:

41. $(x+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$

42. $y(1+xy)\,dx-x\,dy=0$

43. $\frac{y}{x}dx+(y^3-Ln\,x)\,dy=0$

44. $(x\cos y-y\,\text{sen}\,y)\,dy+(x\,\text{sen}\,y+y\cos y)\,dx=0$

SOLUCIONES DEL GRUPO 3

1. x ; $x^2 - xy^2 = C$
2. $\frac{1}{x(x^2+y^2)}$; $Ln\,x + \text{arctg}\,\frac{x}{y} = C$
3. $\frac{1}{xy}$; $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + Lnx + Lny = C$
4. $3\,x^2y^2 - 6\,xy^2 + 2y^3 = C$
5. $x + y - \sqrt{x^2 + y^2} = C$
6. Buscar el factor integrante.
7. $1/M_x$
8. Buscar el factor integrante.
9. Buscar el factor integrante.
10. Buscar el factor integrante.
11. $Log\,xy^3 = C + xy$
12. $x^{-2}\;y^{-2} + 4x^{-1}\;y^{-1} + 2\,Ln\,x = C$
13. $\frac{6}{(xy)^{1/2}} - \frac{2}{(xy)^{3/2}} + Ln\,\frac{x^3}{y^6} = C$
14. $Ln\,(xy^4) + cos\,(xy) = C$
15. $xy = C$
16. Hacer $dv = xdy + ydx$
17. $x^{-3}\;y^{-2} - x^{-1}\;y^{-1} + Ln\,x = C$
18. Hacer $dv = xdy + ydx$
19. $3x^{21/8}\;y^{7/4} + 7x^{-3/8}\;y^{3/4} = C$
20. $3\,x^{-1}\,y^2 + Ln\,xy = C$
21. $xy^2 - 2\,x^2y - 2 = CX$
22. $xy\;(x^2 + y^2) = C$
23. $u = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; $\frac{y-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = C$
24. $u = \frac{1}{x^2}$; $x - \frac{y}{x} = C$
25. $u = e^x$; $2e^x \,\text{sen}\, y + 2e^x\,(x-1) + e^x\,(\text{sen}\,x - \cos x) = C$
26. $u = \frac{1}{(x+y^2)^3}$; $(x+y)^2\;C = x - y^2$
27. $x^3 + y^3 - x^2 - xy + y^2 = C$
28. $\frac{\text{sen}^2 x}{y} + \frac{x^2+y^2}{2} = C$
29. $y\sqrt{1+x^2} + x^2y - y\;Ln\,|x| = C$
30. $\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x} = C$
31. Asociar los términos
32. $3x\cos y + y^3 = C$
33. Asociar los términos
34. Asociar los términos
35. Asociar los términos
36. $\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C$
37. $\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + 2x + \frac{y^3}{3} = C$
38. $x^2 + y^2 - 2\,\text{arctg}\,\frac{y}{x} = C$
39. $x^2 - y^2 = Cy^3$
40. $\frac{x^2}{2} + ye^{x/y} = 2$
41. $Ln|x| - \frac{y^2}{x} = C$
42. $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$
43. $\frac{1}{y}\text{Ln}\,x + \frac{1}{2}y^2 = C$
44. $(x\,\text{sen}\,y + y\cos y - \text{sen}\,y - \text{sen}\,y)e^x = C$

2.2.3 Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Definición 1

Una función $f(x,y)$ es homogénea de grado "n" en sus argumentos si se cumple la identidad:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y) \quad , \quad n \in Z^+$$

Ejemplo 1 . $f(x,y) = xy - x^2 - y^2$ es una función homogénea de segundo grado , puesto que:

$$\begin{aligned} f(tx\,,\,ty) &= (tx)(ty) - (tx)^2 - (ty)^2 \\ &= t^2 xy - t^2 x^2 - t^2 y^2 \\ &= t^2 (xy - x^2 - y^2) \\ f(tx\,,\,ty) &= t^2 f(x\,,y) \;\;,\;\; n = 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 2 . $f(K,L) = A\,K^{\alpha} L^{\beta}$, donde $\alpha + \beta = 1$ es una función de primer grado puesto que:

$$\begin{aligned} f(tK\,,\,tL) &= A\,(tk)^{\alpha}(tL)^{\beta} \\ &= A\,t^{\alpha}\;K^{\alpha}\;t^{\beta}\;L^{\beta} \\ &= t^{\alpha+\beta} A\;K^{\alpha} L^{\beta} \\ &= t^{\alpha+\beta} f(K\,,L) \;\;,\;\; \alpha + \beta = 1 \\ f(tk\,,\,tL) &= t\,f(K\,,L) \end{aligned}$$

Definición 2

Una ecuación diferencial de la forma:

$$\textcircled{1} \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = f(x,y)}$$

se llama homogénea, si $f(x,y)$ es una función homogénea de grado cero en sus argumentos "x" , "y".

La ecuación diferencial homogénea se puede escribir de la forma:

$$\textcircled{2} \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

¿Cómo se resuelve una ecuación diferencial homogénea?

Se resuelve, haciendo el siguiente cambio de variable:

$$\boxed{u = \frac{y}{x}} \quad \Rightarrow \quad y = ux$$

$$\Downarrow$$

$$dy = udx + x\,du$$

en la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{u\,dx + xdu}{dx} = f(u)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{u\,dx} + xdu = \underline{f(u)\,dx}$$

$$\Rightarrow \quad x\,du = [\,f(u) - u\,]\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{du}{f(u) - u} = \frac{1}{x}\,dx}$$

Que viene a ser una Ecuación Diferencial de variables separables.

Definición 3

Si la ecuación diferencial viene expresado en la forma:

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, entonces será homogénea si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.

Ejemplos:

Problema 41 Resolver: $\underbrace{(x^2 - y^2)}_{M(x,y)}\,dx - \underbrace{\frac{2y^3}{x}}_{N(x,y)}\,dy = 0$

Solución:

1) En primer lugar, probemos si es homogénea:

$$\begin{aligned} M(tx, ty) &= (tx)^2 - (ty)^2 \\ &= t^2x^2 - t^2y^2 \\ &= t^2(x^2 - y^2) \\ &= t^2 M(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(tx,ty) &= -\frac{2(ty)^3}{tx} \\ &= -\frac{2t^3y^3}{tx} = t^2\left[\frac{-2y^3}{x}\right] \\ &= t^2 N(x,y) \end{aligned}$$

Como vemos: M y N son homogéneas de segundo grado.

2) Ahora, resolvamos haciendo la sustitución: $y = ux \;\Rightarrow\; dy = u\,dx + x \cdot du$ en la ecuación dada:

$$(x^2 - (ux)^2)\,dx - \frac{2(ux)^3}{x}(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$(x^2 - u^2x^2)dx - 2u^3x^2(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$(x^2 - u^2x^2)dx - 2u^4x^2dx - 2u^3x^3du = 0$$

$$(x^2 - u^2x^2 - 2u^4x^2)dx - 2u^3x^3du = 0$$

$$\underline{x^2}(1 - u^2 - 2u^4)\underline{dx} - 2u^3\,\underline{x^3}du = 0$$

3) Separar adecuadamente: "Junto al dx todas las x" y "Junto a du todas las u"

$$\frac{x^2}{x^3}dx - \frac{2u^3}{1 - u^2 - 2u^4}du = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x}dx + \frac{2u^3}{2u^4 + u^2 - 1}du = 0$$

FACTORIZAR

4) Integrar: $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx \;+\; 2\underbrace{\int \frac{u^3}{(2u^2-1)(u^2+1)}du}_{I} = C_1$

$$\Rightarrow \quad Ln|x| \;+\; 2I \qquad\qquad = C_1$$

5) Cálculo de $\displaystyle I = \int \frac{u^3}{(2u^2-1)(u^2+1)}\,du$ por fracciones parciales

$$\frac{u^3}{(2u^2-1)(u^2+1)} = \frac{Au+B}{2u^2-1} + \frac{Cu+D}{u^2+1}$$

$$= \frac{(Au+B)(u^2+1) + (Cu+D)(2u^2-1)}{(2u^2-1)(u^2+1)}$$

Igualar los numeradores:

$$u^3 = (Au+B)(u^2+1) + (Cu+D)(2u^2-1)$$

$$u^3 \equiv \underline{Au^3} + \underline{\underline{Au}} + \underline{\underline{Bu^2}} + B + \underline{2Cu^3} - \underline{\underline{Cu}} + \underline{\underline{2Du^2}} - D$$

$$u^3 + 0u^2 + 0u + 0 \equiv (A+2C)u^3 + (B+2D)u^2 + (A-C)u + (B-D)$$

Igualando Coeficientes:

$$\begin{cases} A+2C = 1 & \text{(I)} \\ B+2D = 0 & \text{(II)} \\ A-C = 0 & \text{(III)} \\ B-D = 0 & \text{(IV)} \end{cases}$$

$$\begin{matrix}\text{(I)} \\ \text{(III)}\end{matrix}\begin{cases} A+2C = 1 \\ A - C = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{(II)} & B+2D=0 \\ \text{(IV)} & B-D=0 \Rightarrow B=D \end{cases}$$

$$\text{I} - \text{III}: \quad 3C = 1 \qquad \boxed{B=D=0}$$

$$\boxed{\begin{matrix} C = 1/3 \\ A = 1/3 \end{matrix}}$$

6) Sustituir en (5): $I = \int \frac{1/3\,u}{2u^2-1}\,du + \int \frac{1/3\,u}{u^2+1}\,du$

$$I = \frac{1}{3}\frac{1}{4}Ln\,|2u^2-1| + \frac{1}{3}\frac{1}{2}Ln\,(u^2+1)$$

7) Sustituir en (4): $Ln|x| + 2\left(\frac{1}{3}\frac{1}{4}Ln|2u^2-1| + \frac{1}{3}\frac{1}{2}Ln(u^2+1)\right) = C_1$

8) $Ln\,|x| + \frac{1}{6}Ln\,|2u^2-1| + \frac{1}{3}Ln\,(u^2+1) = Ln\,K$, Si $\begin{cases} C_1 = Ln\,K \\ K: \text{constante} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad Ln\,(x\,(2u^2-1)^{1/6}\,(u^2+1)^{1/3}) = Ln\,K$$

$$\Rightarrow \quad x\,(2u^2-1)^{1/6}\,(u^2+1)^{1/3} = K$$

9) Pero $u = \frac{y}{x} \Rightarrow x\left(2\frac{y^2}{x^2}-1\right)^{1/6}\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)^{1/3} = K$

$$m.c.m.\,(6,3) = 6 \Rightarrow \left[x^6\left(\frac{2y^2-x^2}{x^2}\right)\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)^2\right]^{1/6} = K$$

$$\Rightarrow \quad x^2\,(2y^2-x^2)\,(y^2+x^2)^2 = K^6$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x^2\,(2y^2-x^2)\,(y^2+x^2)^2 = C}$$

Problema 42 Resolver: $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$

Solución:

1) Probemos en primer lugar, si es homogénea o no.

Para ello, ordenemos la ecuación:

$$(1*) \quad 0 = \underbrace{\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)}_{M(x,y)}dy \; \underbrace{-\,x}_{N(x,y)}\,dy$$

$$i) \quad M\,(tx\,,ty) = \left(\sqrt{t^2x^2+t^2y^2}+ty\right)dx$$

$$= t\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)dx \quad , \quad n=1$$

$$ii) \quad N\,(tx\,,\,ty) = -\,tx$$

$$= t\,(-x) = t\,N(x,y) \quad , \quad n=1$$

Como vemos, es homogénea de primer grado.

2) Para resolver: hagamos la sustitución

$$y = u\,x \quad \Rightarrow \quad dy = u\,dx + x\,du \quad en \quad (1*)$$

$$\left(\sqrt{x^2+u^2\,x^2}+ux\right)dx - x\,(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$\left(x\sqrt{1+u^2}+ux\right)dx - xudx - x^2du = 0$$

$$\Rightarrow \left(x\sqrt{1+u^2}+ux - xu\right)dx - x^2du = 0$$

$$\Rightarrow \quad x\sqrt{1+u^2}\, dx - x^2 du = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{x^2} dx - \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x} dx - \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = 0$$

$$\Rightarrow \quad Ln|x| - Ln(u+\sqrt{1+u^2}\,) = Ln K$$

$$\Rightarrow \quad Ln\left(\frac{x}{u+\sqrt{1+u^2}}\right) = Ln K$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{u+\sqrt{1+u^2}} = K$$

$$\Rightarrow \quad x = K\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x = K\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{x} K\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = K\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

2.2.3.1 Ecuaciones Diferenciales Reducibles a Homogéneas

Consideremos la ecuación no homogénea:

$(Ax + By + C)\, dx + (A_1x + B_1y + C_1)\, dy = 0$ .... (*)

Haciendo la sustitución:

$$\begin{cases} u = Ax + By + C \\ v = A_1x + B_1y + C_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} du = Adx + Bdy \\ dv = A_1\, dx + B_1\, dy \end{cases}$$

La solución de este sistema de Ecuaciones para dx y dy podemos hallar por determinantes:

$$dx = \frac{\begin{vmatrix} du & B \\ dv & B_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}} \qquad dy = \frac{\begin{vmatrix} A & du \\ A_1 & dv \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{dx = \frac{B_1\,du - B\,dv}{A B_1 - A_1 B}} \qquad \boxed{dy = \frac{A\,dv - A_1\,du}{AB_1 - A_1 B}}$$

evidentemente que $AB_1 - A_1 B \neq 0$

Si sustituimos "*dx*" y "*dy*" en $(*)$ obtendremos una ecuación diferencial de la forma: $P(u,v)\,du + Q(u,v)\,dv = 0$ que ya es homogénea y puede, por tanto, resolverse por el método precedente.

Ejemplos:

Problema 43 Resolver $(2x - 5y + 3)\,dx - (5x - 12y + 8)\,dy = 0$

Solución:

1) Hacemos la sustitución:

$$\begin{cases} u = 2x - 5y + 3 \\ v = 5x - 12y + 8 \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} du = 2\,dx - 5\,dy \\ dv = 5\,dx - 12\,dy \end{cases}$$

Donde: $$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 5 & -12 \end{vmatrix} = -24 + 25 = 1 \neq 0$$

y $$dx = \frac{\begin{vmatrix} du & -5 \\ dv & -12 \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad dy = \frac{\begin{vmatrix} 2 & du \\ 5 & dv \end{vmatrix}}{\Delta}$$

3) $\boxed{dx = -12\,du + 5\,dv}$ **(4)** $\boxed{dy = 2dv - 5\,du}$

5) Sustituir (2); (3) y (4) en la Ecuación diferencial original:

$$u\,(-12du+5dv)-v\,(2dv-5du)=0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{-12udu}+\underline{\underline{5udv}}-\underline{\underline{2vdv}}+\underline{5vdu}=0$$

(5∗) $\Rightarrow$ $(5v-12u)\,du+(5u-2v)\,dv=0$

↑ *es una ecuación diferencial homogénea de primer grado.*

6) Hagamos, entonces la sustitución: $\boxed{v=tu}$

$$\Rightarrow dv=tdu+udt$$

y reemplazar en (5∗)

$$(5\,tu-12\,u)\,du+(5u-2tu)\,(tdu+udt)=0$$

$$\Rightarrow \quad (5tu-12u)\,\underline{\underline{du}}+(5ut-2t^2u)\,\underline{\underline{du}}+(5u^2-2tu^2)\,dt=0$$

$$\Rightarrow \quad (5tu-12u+5ut-2t^2u)\,du+u^2\,(5-2t)\,dt=0$$

$$\Rightarrow \quad (-12u+10ut-2t^2u)\,du+u^2\,(5-2t)\,dt=0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{u}\,(-12+10t-2t^2)\,\underline{du}+\underline{u^2}\,(5-2t)\,dt=0$$

7) Separar las variables en u y las variables en t :

$$\frac{u}{u^2}\,du+\frac{5-2t}{-12+10t-2t^2}\,dt=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{u}\,du+\frac{2t-5}{2t^2-10t+12}\,dt=0$$

8) Integrando: $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du+\int \frac{2t-5}{\underbrace{2t^2-10t+12}_{w}}\,dt=K$

El diferencial del denominador w, es $dw=(4t-10)\,dt$

$$=2(2t-5)\,dt$$

Notemos que en el numerador, existe $(2t-5)$

$\Rightarrow \qquad Ln|u| + \frac{1}{2} Ln|2t^2 - 10t + 12| = Ln\, C_1$

$\Rightarrow \qquad Ln\left[u\,(2t^2 - 10t + 12)^{1/2}\right] = Ln\, C_1$

$\Rightarrow \qquad u\,(2t^2 - 10t + 12)^{1/2} = C_1$

Elevar al cuadrado: $\quad u^2\,(2t^2 - 10t + 12) = C_1^2$

$$\left.\begin{array}{l} De \quad v = tu \\ \Rightarrow \quad t = \frac{v}{u} \end{array}\right\} \Rightarrow \; u^2\left(2\frac{v^2}{u^2} - 10\frac{v}{u} + 12\right) = C \quad , \quad C_1^2 = C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{2v^2 - 10\,uv + 12\,u^2 = C}$$

Problema 44 Resolver $(x - 2y + 1)\,dx + (2x - 4y + 3)\,dy = 0$

Solución:

1) Al hacer la sustitución $\begin{cases} u = x - 2y + 1 \\ v = 2x - 4y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = x - 2y + 1 \\ v = 2(x - 2y) + 3 \end{cases}$

obtenemos: $(\alpha)\ \begin{cases} du = dx - 2dy \\ dv = 2dx - 4dy \end{cases}$

2) ***Propiedad:*** El sistema de ecuaciones (α) tiene solución única si el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$ es diferente de cero.

Pero, en este caso resulta que: $\Delta = -4 + 4 = 0$

3) Cuando $\Delta = 0$, entonces no podemos hacer uso de la sustitución hecho en (1) .

¿Qué hacer?

En este caso: haremos uso necesario de la sustitución

$$\boxed{z = x - 2y} \quad \Rightarrow \quad dz = dx - 2\,dy$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{dx = dz + 2\,dy}$$

en la ecuación original con la finalidad de convertirla en una ECUACIÓN DE VARIABLES SEPARABLES.

$$(x-2y+1)\,dx+(2x-4y+3)\,dy=0$$

son proporcionales

$\Rightarrow \quad ((x-2y)+1)\,dx+[2\,(x-2y)+3]\,dy=0$, hacer $x-2y=z$

$\Rightarrow \quad (z+1)dx+[2z+3]\,dy=0$

$\Rightarrow \quad (z+1)\,(dz+2dy)+(2z+3)\,dy=0$

$\Rightarrow \quad (z+1)\,dz+(z+1)\,2\,dy+(2z+3)\,dy=0$

$\Rightarrow \quad (z+1)\,dz+(2z+2+2z+3)\,dy=0$

$\Rightarrow \quad (z+1)\,dz+(4z+5)\,dy=0$

Es una ***Ecuación Diferencial de Variables Separables***

4) Separemos adecuadamente las variables:

$$\Rightarrow \quad \frac{(z+1)}{4z+5}\,dz+dy=0$$

5) Integrar:

$$\int \frac{(z+1)}{4z+5}\,dz+\int dy=C_1$$

Dividir, antes de integrar:

$z+1$	$4z+5$
$-z-5/4$	$1/4$
$-1/4$	

$$\Rightarrow \quad \int\left(\frac{1}{4}+\frac{-1/4}{4z+5}\right)dz+\int dy=C_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}z-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}Ln\,|\,4z+5\,|+y=C_1$$

$$\Rightarrow \quad 4z-Ln\,|\,4z+5\,|+16y=16\,C_1$$

Pero : $z=x-2y$

$\Rightarrow \quad 4(x-2y) - Ln\,|4(x-2y)+5| + 16y = C$

$\Rightarrow \quad 4x - 8y - Ln\,|4x-8y+5| + 16y = C$

$\Rightarrow \quad 4x - 8y - Ln\,|4x-8y+5| = Ln\,K$

$\Rightarrow \quad 4x - 8y = Ln\,|K\,(4x-8y+5)|$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k\,(4x-8y+5) = e^{4(x+2y)}}$$

Observación: Cuando en una Ecuación Diferencial observamos que los términos en "*x*" y en "*y*" son proporcionales, inmediatamente hacemos la sustitución: $z = ax + by$.

En el problema 44, podemos observar que:

(α) .... $(\underline{\underline{x-2y}}+1)\,dx + (\underline{\underline{2x-4y}}+3)\,dy = 0$

$\rightarrow 2\,(x - 2y)$

son proporcionales: uno es el doble del otro.

Al hacer la sustitución: $\boxed{z = x - 2y}$ (I)

$dz = dx - 2dy$

de aquí, puedo despejar dx o dy

Al despejar dy, sería:

$$\boxed{dy = \tfrac{1}{2}(dx - dz)} \quad \text{(II)}$$

Sustituyendo (I) y (II) en (α), obtendremos:

$$(z+1)\,dx + (2z+3)\,\tfrac{1}{2}(dx - dz) = 0$$

$$\underline{2(z+1)\,dx} + \underline{(2z+3)\,dx} - (2z+3)\,dz = 0$$

$\Rightarrow \quad (2\,(z+1) + 2\,z + 3)\,dx - (2\,z+3)\,dz = 0$

$\Rightarrow \quad (4\,z+5)\,dx - (2\,z+3)\,dz = 0$

$$\Rightarrow \quad dx - \frac{(2z+3)}{(4z+5)}\, dz = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int dx - \int \frac{(2z+3)}{(4z+5)}\, dz = C_1$$

2z + 3	4z + 5
−2z − 5/2	1/2
0 + 1/2	

$$\Rightarrow \quad \int dx - \int \left[\frac{1}{2} + \frac{1/2}{4z+5} \right] dz = C_1$$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} Ln\,|4z+5| = C_1$$

$$\Rightarrow \quad 8x - 4z - Ln\,|4z+5| = \underbrace{8\,C_1}_{Ln\,K}$$

$$\Rightarrow \quad 8x - 4\,(x-2y) - Ln\,|\,4\,(x-2) + 5\,| = Ln\,k$$

$$\Rightarrow \quad 4x + 8y - Ln\,|\,4\,(x - 8y + 5\,| = Ln\,k$$

$$\Rightarrow \quad 4x + 8y = Ln\;[\,k\,(4x - 8y + 5)\,]$$

$$\Rightarrow \quad k\,(4x - 8y + 5) = e^{4x+8y}$$

Que también podemos escribir como:

$$4x - 8y + 5 = \frac{1}{K}\, e^{4x+8y}$$

ó $\boxed{4x - 8y + 5 = C\, e^{4x+8y}}$, siendo $\frac{1}{k} = C$ ← constante

Problema 45 Resolver $(8x + 25y - 62)\, dx + (-11x - 4y + 11)\, dy = 0$

Solución:

Como: $\begin{vmatrix} 8 & 25 \\ -11 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$

1) Hacemos la sustitución: $\begin{cases} u = 8x + 25y - 62 \\ v = -11x - 4y + 11 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = 8\,dx + 25dy \\ dv = -11dx - 4dy \end{cases}$$

Donde: $\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 25 \\ -11 & -4 \end{vmatrix} = -32 + 275 = 243 \neq 0$

y $dx = \dfrac{\begin{vmatrix} du & 25 \\ dv & -4 \end{vmatrix}}{\Delta}$ $\qquad dy = \dfrac{\begin{vmatrix} 8 & du \\ -11 & dv \end{vmatrix}}{\Delta}$

$$dx = \frac{-4du - 25dv}{243} \quad , \quad dy = \frac{8dv + 11du}{243}$$

2) Sustituir en la Ecuación diferencial dada:

$$u \cdot \frac{(-4du - 25dv)}{243} + v\,\frac{(8dv + 11du)}{243} = 0$$

$$-4u\,\underline{\underline{du}} - 25u\,dv + 8vdv + 11v\,\underline{\underline{du}} = 0$$

3) $\Rightarrow (11v - 4u)\,du + (8v - 25\,u)\,dv = 0$

es una Ecuación Homogénea de primer grado que se resuelve haciendo :

4) $v = tu \;\Rightarrow\; dv = tdu + u\,dt$ y sustituyendo en (3)

$$(11tu - 4u)\,\underline{\underline{du}} + (8tu - 25u)\,(t\underline{\underline{du}} + udt) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (11tu - 4u)\,\underline{\underline{du}} + (8tu - 25u)\,t\,\underline{\underline{du}} + (8tu - 25u)\,u\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \quad (11tu - 4u + 8t^2u - 25ut)\,du + (8t - 25)\,u^2dt = 0$$

$$\Rightarrow \quad (8t^2u - 14ut - 4u)\,du + (8t - 25)\,u^2dt = 0$$

$$\Rightarrow \quad u\,(8t^2 - 14t - 4)\,du + (8t - 25)\,u^2dt = 0$$

Es una Ecuación Diferencial de variables separables y se resuelve como sigue:

$$\Rightarrow \quad \frac{u}{u^2}du + \frac{8t - 25}{8t^2 - 14t - 4}dt = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{u}du + \frac{8t - 25}{8t^2 - 14t - 4}dt = 0$$

5) Integrando: $$Ln|u| + \underbrace{\int \frac{8t-25}{8t^2-14t-4}\,dt}_{I} = C$$

6) ***Cálculo de I :***

Haciendo $h = 8\,t^2 - 4 \;\Rightarrow\; dh = (16\,t - 14)\,dt$

Multiplicar el numerador por 2 y dividir entre 2, obtenemos:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{16t-50}{8t^2-14t-4}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{16t-14}{8t^2-14t-4}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{36}{8t^2-14t-4}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}Ln|8t^2-14t-4| - \frac{18}{8}\underbrace{\int \frac{dt}{t^2-\frac{7}{4}t-\frac{1}{2}}}_{I_1}$$

7) ***Cálculo de I_1*** : Completando cuadrados en el denominador.

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2-\frac{7}{4}t+\frac{49}{64}-\frac{49}{64}-\frac{1}{2}} = \int \frac{dt}{\left(t-\frac{7}{8}\right)^2-\frac{81}{64}} = \frac{1}{2\left(\frac{9}{8}\right)}Ln\left|\frac{t-7/8-9/8}{t-\frac{7}{8}+\frac{9}{8}}\right|$$

$$\Rightarrow\quad I_1 = \frac{4}{9}\;Ln\left|\frac{8t-16}{8t+2}\right| = \frac{4}{9}Ln\left|\frac{4t-8}{4t+1}\right|$$

8) Sustituir I_1 y I en 5): haciendo $C = LnK$

$$Ln|u| + \frac{1}{2}Ln|8t^2-14t-4| - \frac{18}{8}\cdot\frac{4}{9}Ln\left|\frac{4t-8}{4t+1}\right| = Ln\,K$$

m.c.m. = 2

$$\Rightarrow\qquad 2\,Ln\,|u| + Ln|8t^2-14t-4| - 2Ln\left|\frac{4t-8}{4t+1}\right| = 2Ln\,K \quad,\quad \text{hacer } 2Ln\,K = C$$

$$= Ln\,C$$

$$\Rightarrow\qquad Ln\left[\frac{u^2(8t^2-14t-4)}{\left(\frac{4t-8}{4t+1}\right)^2}\right] = Ln\,C$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{u^2(4t+1)^2(8t^2-14t-4)}{(4t-8)^2} = C$$

$$\Rightarrow\qquad u^2 = C(4t-8)^2\big/(4t+1)^2(8t^2-14t-4)$$

$$\Rightarrow \qquad u=\left(\frac{4t-8}{4t+1}\right)\sqrt{\frac{C}{8t^2-14t-4}}$$

9) Haciendo los sucesivas sustituciones de $v=tu$ y $u=8x+25y-6$ $v=-11x-4y+11$ se halla la solución en términos de "x" , "y".

Problema 46 Resolver $\frac{dy}{dx}=\frac{3x-y+2}{6x-2y}$

Solución:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{3x-y+2}{6x-2y} \iff (6x-2y)dy=(3x-y+2)dx$

$$\iff 0=(\underline{3x-y}+2)dx-2(\underline{3x-y})dy$$

2) Hacer la sustitución: $\boxed{z=3x-y}$ $(2*)$

$$\Rightarrow \qquad dz=3dx-dy$$

despejar dy : $\qquad dy=3dx-dz \qquad (2{*}{*})$

3) Sustituir $(2*)$ y $(2{*}{*})$ en (1):

$$\Rightarrow \quad 0=(z+2)dx-2z(3dx-dz)$$

$$\Rightarrow \quad 0=(\underline{z+2})dx-\underline{6zdx}+2zdz$$

$$\Rightarrow \quad 0=(z+2-6z)dx+2zdz$$

$$0=(\underline{2-5z})dx+2z\,\underline{dz}$$

4) Ahora, hagamos la separación de variables iguales.

$$\Rightarrow \qquad dx+\frac{2z}{2-5z}dz=0$$

5) Integrar: $\int dx-2\int\frac{z}{5z-2}dz=K$

↑ *dividir :*

$$\begin{array}{r|l} z & 5z-2 \\ \hline -z+2/5 & 1/5 \\ \hline 0+2/5 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \int dx - 2\int\left(\frac{1}{5}+\frac{2/5}{5z-2}\right)dz = K$$

$$\Rightarrow \quad x - 2\left(\frac{1}{5}z + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}Ln\,|5z-2|\right) = K$$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{2}{5}z - \frac{4}{25}Ln\,|5z-2| = K$$

$$\Rightarrow \quad 25x - 10z - 4\,Ln\,|5z-2| = 25K$$

$$\Rightarrow \quad 25x - 10z - 4\,Ln\,|5z-2| = C$$

2.3 ESTUDIO DE LA ECUACIÓN: $y' + P(x)y = Q(x)$

Definición

Una ecuación de la forma $y' + y\,P(x) = Q(x)$, en la cual la variable dependiente "y" y su derivada "$y' = \frac{dy}{dx}$" sólo figuran con exponente uno, se llama LINEAL.

¿Cómo se halla la solución de la ecuación diferencial $y' + yP(x) = Q(x)$?

La solución, se halla, fácilmente, introduciendo el factor integrante: $e^{\int P(x)\,dx}$.

Veamos como es esto:

1) La ecuación diferencial $\quad y' + y\,P(x) = Q(x)$

es equivalente a: $\quad \frac{dy}{dx} + y\,P(x) = Q(x)$

$$\Rightarrow \quad dy + y\,P(x)\,dx = Q(x)\,dx$$

2) Multiplicar por $e^{\int P(x)dx}$, obtenemos:

$$e^{\int P(x)dx}dy + P(x)e^{\int P(x)dx}dx = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

3) $$d\left[\,y e^{\int P(x)dx}\,\right] = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

4) Integrando: $y\, e^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx + C$

5) Despejar "y": $y = \frac{1}{e^{\int P(x)\,dx}} \left[\int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} dx + C \right]$

$$\Rightarrow \boxed{y = e^{-\int P(x)\,dx} \left[\int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} dx + C \right]}$$

Conclusión:

1. La solución de $y' + yP(x) = Q(x)$

es: $y = e^{-\int P(x)\,dx} \left[\int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} dx + C \right]$

2. La solución de $\frac{dx}{dy} + xP(y) = Q(y)$

es: $x = e^{-\int P(y)\,dy} \left[\int Q(y)\, e^{\int P(y)\,dy} dy + C \right]$

Problema 47 Resolver $\frac{dy}{dx} + 2xy - 2xe^{-x^2} = 0$

Solución:

1) Se puede escribir: $\frac{dy}{dx} + 2xy = 2xe^{-x^2}$

donde $\begin{cases} P(x) = 2x \\ Q(x) = 2xe^{-x^2} \end{cases}$

2) La solución será: $y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right]$

3) El factor integrante es: $e^{\int p(x)\, dx}$

Pero: $\int p(x)\,dx = \int 2x\,dx = 2\,\frac{x^2}{2} = x^2$

4) Sustituir (3) en (2):

$$y = e^{-x^2}\left[\int 2xe^{-x^2}e^{x^2}\,dx + C\right]$$

$$y = e^{-x^2}\left[\int 2x\;\,dx + C\right]$$

$$y = e^{-x^2}\left[2\frac{x^2}{2} + C\right]$$

$$y = e^{-x^2}\,[x^2 + C]$$

Problema 48 Resolver $y\frac{dx}{dy} + (1+y)\,x - e^y = 0$

Solución:

1) Dividir la ecuación entre "*y*" : $\frac{dx}{dy} + \frac{(1+y)}{y}x = \frac{e^y}{y}$

$$= y^{-1}\,e^y$$

donde $\begin{cases} P(y) = \frac{1+y}{y} \\ Q(y) = y^{-1}e^y \end{cases}$

2) La solución será: $x = e^{-\int p(y)\,dy}\left[\,Q(y)\,e^{\int p(y)\,dy}\,dy + c\right]$

3) El factor integrante es: $e^{\int p(y)\,dy}$

Donde: $\int p(y)dy = \int \frac{1+y}{y}dy = \int\left(\frac{1}{y}+1\right)dy$

$$= Ln\,y + y$$

4) Luego: $e^{\int p(y)\,dy} = e^{Lny + y}$

5) Sustituir (3) y (4) en (2):

$$x = e^{-(Lny+y)}\left[\int y^{-1}e^{y}e^{Lny+y}dy + C\right]$$

$$x = e^{-(Lny+y)}\left[\int y^{-1}e^{Lny+2y}dy + C\right]$$

$$x = e^{-Lny}e^{-y}\left[\int y^{-1}e^{Lny}e^{2y}dy + C\right]$$

$$x = y^{-1}e^{-y}\left[\int y^{-1}ye^{2y}dy + C\right] \quad , \text{ aplicar: } e^{Ln(m)} = m$$

$$x = y^{-1}e^{-y}\left[\int e^{2y}dy + C\right]$$

$$x = y^{-1}e^{-y}\left[\tfrac{1}{2}e^{2y} + C\right] \quad , \begin{cases} e^{Lny} = y \\ e^{-Lny} = e^{Lny^{-1}} = y^{-1} \end{cases}$$

Que puede escribirse como:

$$x = \frac{1}{ye^{y}}\left[\frac{e^{2y}+2C}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 2xye^{y} = e^{2y} + 2C \quad , \quad 2C = k$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{2xye^{y} - e^{2y} = k}$$

Problema 49 Resolver: $2x\,dy = (2x^3 - y)\,dx$

Solución:

1) "Dividir" entre $2x$ dx:

$$\frac{2x\,dy}{2x\,dx} = \frac{(2x^3 - y)\,dx}{2x\,dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = x^2 - \frac{1}{2x}y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2x}y = x^2 \qquad \begin{cases} p(x) = \frac{1}{2x} \\ Q(x) = x^2 \end{cases}$$

2) La solución será: $y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$

3) Donde: $\int p\,(x)\,dx = \int \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}Ln\,x$

4) $\begin{cases} e^{-\int p(x)d} = e^{-\frac{1}{2}Ln\,x} = e^{Ln\,x^{-1/2}} = x^{-1/2} \\ e^{\int p(x)\,dx} = e^{\frac{1}{2}Ln\,x} = e^{Ln\,x^{1/2}} = x^{1/2} \end{cases}$

5) Sustituir (4) en (2).

$$y = x^{-1/2}\left[\int x^2 x^{1/2}dx + C\right]$$

$$y = x^{-1/2}\left[\int x^{5/2}dx + C\right]$$

$$y = x^{-1/2}\left[\frac{2x^{7/2}}{7} + C\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{2}{7}x^3 + \frac{C}{\sqrt{x}}}$$

Problema 50 Resolver $2yy' - \frac{y^2}{x^2} = e^{\frac{x^2-1}{x}}$

Solución:

1) Al dividir la Ecuación por $2y$, obtenemos:

$$y' - \frac{y^2}{2y\,x^2} = \frac{1}{2y}e^{\frac{x^2-1}{x}}$$

$$y' - \frac{1}{2x^2}\,y = \frac{1}{2y}e^{\frac{x^2-1}{x}}$$

Por la presencia de $\frac{1}{y}$ no se podrá resolver directamente.

2) ¿Qué hacer? Hacer la sustitución siguiente:

$$u = y^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2y\,dy$$

$$\Rightarrow \quad dy = \frac{1}{2y}\,du$$

3) Sustituir (2) en la Ecuación dada:

Si $\quad 2y\,dy - \frac{y^2}{x^2}\,dx = e^{\frac{x^2-1}{x}}\,dx$

$$\Rightarrow \quad \cancel{2y}\cdot\frac{1}{\cancel{2y}}\,du - \frac{u}{x^2}\,dx = e^{\frac{x^2-1}{x}}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad du - \frac{u}{x^2}\,dx = e^{\frac{x^2-1}{x}}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} - \frac{1}{x^2}u = e^{\frac{x^2-1}{x}} \quad , \text{ donde } \begin{cases} P(x) = -\frac{1}{x^2} \\ Q(x) = e^{\frac{x^2-1}{x}} \end{cases}$$

4) La solución será: $\quad u = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int (x)dx}dx + C\right]$

Donde:

i) $\quad \int P(x)dx = \int -\frac{1}{x^2}\,dx = -\int x^{-2}dx = -\frac{x^{-1}}{-1} = \frac{1}{x}$

ii) $\quad e^{-\int p(x)\,dx} = e^{-\frac{1}{x}}$

iii) $\quad e^{\int p(x)\,dx} = e^{\frac{1}{x}}$

5) Sustituir en (4):

$$u = e^{-\frac{1}{x}}\left[\int e^{\frac{x^2-1}{x}}e^{\frac{1}{x}}dx + C\right] = e^{-\frac{1}{x}}\left[\int e^x dx + C\right] = e^{-\frac{1}{x}}[e^x + C]$$

Como: $\quad u = y^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 e^{\frac{1}{x}} = e^x + C$

Problema 51 Resolver: $y' + 2xy + x = e^{-x^2}$

Solución:

1) La Ec. dada se puede escribir de la forma:

$$y' + 2xy = e^{-x^2} - x$$

$$\text{Donde} \begin{cases} P(x) = 2x \\ Q(x) = e^{-x^2} - x \end{cases}$$

2) La solución será: $y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$

3) Donde: *i)* $\int P(x)dx = \int 2x\,dx = 2\frac{x^2}{2} = x^2$

ii) $e^{-\int p(x)\,dx} = e^{-x^2}$

iii) $e^{\int P(x)\,dx} = e^{x^2}$

4) Sustituir (3) en (2): $y = e^{-x^2}\left[\int (e^{-x^2} - x)e^{x^2}\,dx + C\right]$

$$y = e^{-x^2}\left[\int (1 - xe^{x^2})\,dx + C\right]$$

$$y = e^{-x^2}\left[\left(x - \frac{1}{2}e^{x^2}\right) + C\right]$$

$\Rightarrow$ $2ye^{x^2} = 2x - e^{x^2} + 2C$, $2C = k$

$\Rightarrow$ $\boxed{(2y+1)\,e^{x^2} = 2x + k}$

Problema 52 Resolver: $x^2 y'' + 2\,x\,y' = 2$

Solución:

1) En este caso, hacer: $u = y'$ $\Rightarrow$ $u' = y''$

2) Sustituir (1) en la Ecuación diferencial $x^2u' + 2xu = 2$.

3) Dividir entre x^2 :

$$u' + \frac{2}{x}u = \frac{2}{x^2}\ , \quad \text{donde} \begin{cases} P(x) = \frac{2}{x} \\ Q(x) = \frac{2}{x^2} \end{cases}$$

4) La solución será: $\quad u = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$

5) Donde:

i) $\quad \int P(x)\,dx = \int \frac{2}{x}dx = 2\,Lnx$

ii) $\quad e^{-\int P(x)\,dx} = e^{-2Lnx} = e^{Lnx^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

iii) $\quad e^{\int P(x)\,dx} = e^{2Lnx} = e^{Lnx} = x^2$

6) Sustituir (5) en (4)

$$u = \frac{1}{x^2}\left[\int \frac{2}{x^2}x^2dx + C\right]$$

$$u = \frac{1}{x^2}\left[\int 2dx + C\right]$$

$$u = \frac{1}{x^2}[2x + C]$$

$$\boxed{u = \frac{2}{x} + \frac{C}{x^2}}$$

7) Pero $u = y' = \frac{dy}{dx}$, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} + \frac{C}{x^2} \ \Rightarrow\ dy = \frac{2}{x}dx + \frac{C}{x^2}dx$$

INTEGRAR $\Rightarrow \; y = 2Ln x + C\frac{x^{-1}}{-1} + k$, pues: $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx$

$\Rightarrow \; y = 2Ln x - \frac{C}{x} + k \qquad = \frac{x^{-1}}{-1}$

$\Rightarrow \; yx = 2x Ln x - C + kx \qquad = -\frac{1}{x}$

o : $yx = 2x Ln x + C_1 + C_2 x \; \begin{cases} -C = C_1 \\ k = C_2 \end{cases}$

Problema 53 Resolver: $dx + \frac{x}{\sqrt{1-y^2}}dy = e^{arc\cos y}\,dy$

Solución:

1) Dividir la ecuación entre dy :

$$\left.\frac{dx}{dy} + x\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = e^{arccos\, y}\right\} \begin{array}{l} P(y) = -\left(-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right) \\ Q(y) = e^{arc\cos y} \end{array}$$

2) La solución será: $x = e^{-\int P(y)dy}\left[\int Q(y)\,e^{\int P(y)dy}dy + C\right]$

3) Donde:

i) $\int P(y)\,dy = -\int \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}dy = -arc\cos y$

ii) $e^{-\int P(y)\,dy} = e^{arc\cos y}$

iii) $e^{\int P(y)\,dy} = e^{-arc\cos y}$

4) Sustituir (3) en (2):

$$x = e^{arccos\, y}\left[\int e^{arccos\, y}\, e^{-arccos\, y}dy + C\right]$$

$$x = e^{arccos\, y}\left[\int dy + C\right]$$

$$\boxed{x = e^{arccos\, y}[\,y + C\,]}$$

Problema 54 Resolver: $y' + 2y = x^2 + 2x$

Solución:

1) En la ecuación tenemos: $\begin{cases} P(x) = 2 \\ Q(x) = x^2 + 2x \end{cases}$

2) La solución general será: $y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$

3) Pero:

i) $\int P(x)\,dx = 2dx = 2x$ ii) $e^{-\int P(x)\,dx} = e^{-2x}$

iii) $e^{\int P(x)\,dx} = e^{2x}$

4) Sustituir (3) en (2):

$$y = e^{-2x}\left[\int (x^2 + 2x)e^{2x}dx + C\right]$$

$$y = e^{-2x}\left[\int \underbrace{x^2e^{2x}dx}_{I_1} + 2\int \underbrace{xe^{2x}dx}_{I_2} + C\right]$$

5) CÁLCULO DE I_1 POR PARTES:

$u = x^2$ $dv = e^{2x}$

$du = 2xd$ $v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$I_1 = \int x^2\, e^{2x}dx$$

$$I_1 = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int x\, e^{2x}dx$$

$u = x$ $dv = e^{2x}$

$du = dx$ $v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$I_1 = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right)$$

$$I_1 = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} = \frac{1}{4}e^{2x}[2x^2 - 2x + 1]$$

CÁLCULO DE I_2 POR PARTES:

$$I_2 = \tfrac{1}{2}xe^{2x} - \tfrac{1}{2}\int e^{2x}dx$$

$$I_2 = \tfrac{1}{2}xe^{2x} - \tfrac{1}{4}e^{2x}$$

$$\boxed{I_2 = \tfrac{1}{4}e^{2x}[2x-1]}$$

6) Sustituir (5) en (4):

$$y = e^{-2x}\left[\tfrac{1}{4}e^{2x}(2x^2-2x+1) + 2\tfrac{1}{4}e^{2x}(2x-1) + C\right]$$

$$y = \tfrac{1}{4}e^{-2x}e^{2x}[2x^2-2x+1+4x-2+4ce^{-2x}]$$

$$y = \tfrac{1}{4}[2x^2+2x-1+4ce^{-2x}]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = \tfrac{1}{4}(2x^2+2x-1) + Ce^{-2x}}$$

Problema 55 Resolver: $(x^2+2x-1)y' - (x+1)y = x+1$

Solución:

1) Dividir la ecuación entre: x^2+2x-1

$$y' - \frac{x+1}{x^2+2x-1}y = \frac{x+1}{x^2+2x-1}$$

2) Donde: $P(x) = -\dfrac{x+1}{x^2+2x-1}$; $Q(x) = -\dfrac{x+1}{x^2+2x-1}$

3) La solución será:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C\right]$$

4) Donde:

i) $\displaystyle\int p(x)\,dx = -\int \frac{x+1}{x^2+2x-1}\,dx = -\int \frac{(x+1)}{u}\,\frac{1}{2(x+1)}\,du$
$\qquad u = x^2+2x-1$, $\quad du = (2x+2)\,dx = 2(x+1)\,dx$, $\quad dx = \frac{1}{2(x+1)}\,du$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}Ln|u| = -\frac{1}{2}Ln|x^2+2x-1|$$

ii) $e^{-\int P(x)\,dx} = e^{\frac{1}{2}Ln(x^2+2x-1)} = e^{Ln(x+2x-1)^{1/2}} = (x^2+2x-1)^{1/2}$

iii) $e^{\int p(x)\,dx} = e^{-\frac{1}{2}Ln(x+2x-1)} = e^{Ln(x+2x-1)^{-1/2}} = (x^2+2x-1)^{-1/2}$

5) Sustituir (4) en (3):

$$y = (x^2+2x-1)^{1/2}\left[\int \left(\frac{x+1}{x^2+2x-1}\right)(x^2+2x-1)^{-1/2}\,dx + C\right]$$

$$y = (x^2+2x-1)^{1/2}\left[\int \frac{(x+1)}{(x^2+2x-1)^{3/2}}\,dx + C\right]$$

$$y = (x^2+2x-1)^{1/2}\left[\int (x+1)(x^2+2x-1)^{-3/2}\,dx + C\right]$$

$$u = x^2+2x-1 \;\Rightarrow\; du = (2x+2)\,dx = 2(x+1)\,dx$$

$$y = (x+2x-1)^{1/2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+2x-1)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C\right]$$

$$\boxed{y = -1 + C\sqrt{x^2+2x-1}}$$

Problema 56 Resolver: $x\,Ln\,x \,.\, y' - y = x^3\,(3\,Ln\,x - 1)$

Solución:

1) Dividir la ecuación entre $x\,Ln\,x$: $y' - \frac{1}{x\,Ln\,x}\,y = \frac{x^3\,(3\,Ln\,x-1)}{x\,Ln\,x}$

$$\Rightarrow \quad y' - \frac{1}{x\,Ln\,x}\,y = \frac{x^2\,(3\,Ln\,x-1)}{Ln\,x}$$

2) Donde: $P\,(x) = -\frac{1}{x\,Ln\,x}$,

$$Q\,(x) = \frac{x^2\,(3\,Ln\,x-1)}{Ln\,x}$$

3) La solución es: $y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C\right]$

4) Pero:

i) $\int P\,(x)\,dx = \int -\frac{1}{x\,Ln\,x}\,dx = -\frac{\frac{1}{x}}{Ln\,x}\,dx = -Ln\,(Lnx)$

ii) $e^{-\int P\,(x)\,dx} = e^{Ln\,(Lnx)} = Ln\,x$ pues: $u = Lnx$, $du = \frac{1}{x}dx$

iii) $e^{\int P\,(x)\,dx} = e^{-Ln\,(Ln\,x)} = e^{Ln\,(Ln\,x)^{-1}} = (Ln\,x)^{-1} = \frac{1}{Ln\,x}$

5) Sustituir (4) en (3) : $y = Ln\,x\left[\int \frac{x^2\,(3\,Ln\,x-1)}{Ln\,x}\cdot\frac{1}{Ln\,x}\,dx + C\right]$

$$y = Ln\,x\left[\int \frac{x^2\,(3\,Ln\,x-1)}{Ln^2\,x}\,dx + C\right]$$

2.3.1 Ecuaciones Reducibles a la Forma $y' + P(x)y = Q(x)$ Ecuación de Bernoulli.

Definición

Una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^n Q(x) \quad \text{o} \quad \frac{dx}{dy} + xP(y) = x^n Q(y)$$

$$n \neq 0 \, , n \neq 1$$

se llama ecuación diferencial de BERNOULLI.

¿Cómo se resuelve la ecuación de Bernoulli?

Se puede resolver de dos maneras:

MÉTODO 1 Reduciendo la ecuación diferencial $y' + P(x) = y^n Q(x)$ (de Bernoulli) a la forma lineal:

$$\frac{1}{1-n} z' + zP(x) = Q(x)$$

Veamos:

1) Dado la ecuación: $y' + y\,P(x) = y^n Q(x)$

2) Dividir por y^n: $y^{-n} y' + y^{-n+1} P(x) = Q(x)$

3) Hacer el cambio de variable: $z = y^{-n+1}$

$$\Rightarrow \quad z' = (1-n)\, y^{-n} \,.\, y'$$

$$\Rightarrow \quad y^{-n} y' = \frac{z'}{1-n}$$

4) Sustituir (3) en (2): $\dfrac{z'}{1-n} + z\,P(x) = Q(x)$

Ecuac. Dif. Lineal en z

MÉTODO 2 Haciendo el cambio de variable siguiente:

$$y = u(x)\ v(x)$$
$$\Rightarrow \quad y' = u'\ v + u\ v'$$

Veamos algunos ejemplos:

Problema 57 Resolver: $y' - 3x\,y = y^2\,x$

Solución:

1) Al comparar : $y' - 3xy = y^2 \cdot x$ .... (1*)

con : $y' + P(x)y = y^n \cdot x$

tenemos : $P(x) = -3x\ ,\ n = 2\ ,\ Q(x) = x$

2) Con la sustitución : $z = y^{-n+1}$

para $n = 2$, es : $z = y^{-1}$

Al derivar : $z' = -y^{-2} \cdot y'$

3) Con esta sustitución, la **E.D.** dada en (1*) se convierte en la forma:

$$\frac{z'}{1-n} + P(x) = Q(x)$$

esto es : $\frac{z'}{1-2} - 3x\,z = x$

$$-z' - 3x\,z = x$$

(2*) .... : $z' + 3x\,z = -x \quad \begin{cases} P(x) = 3x \\ Q(x) = -x \end{cases}$

4) La solución de (2*) es: $z = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$

5) Donde: *i)* $\int P(x)\,dx = \int 3x\,dx = \frac{3x^2}{2}$

ii) $e^{-\int P(x)\,dx} = e^{-\frac{3}{2}x^2}$

iii) $e^{\int P(x)\,dx} = e^{\frac{3}{2}x^2}$

6) Sustituir (5) en (4):

$$z = e^{-\frac{3}{2}x^2}\left[\int (-x)e^{\frac{3x^2}{2}}\,dx + C\right] \qquad \begin{matrix} u = \frac{3}{2}x^2 \\ du = 3x\,dx \end{matrix}$$

$$z = e^{-\frac{3}{2}x^2}\left[-\tfrac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x^2} + C\right]$$

$$z = -\tfrac{1}{3} + C\,e^{-\frac{3}{2}x^2}$$

7) Pero: $z = y^{-1} = \frac{1}{y}$, entonces:

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{3} + \frac{C}{e^{3/2\,x^2}} \quad , \text{ m.c.m. } = 3y\,e^{\frac{3}{2}x^2}$$

$$\Rightarrow \quad 3\,e^{\frac{3}{2}x^2} = -y\,e^{\frac{3}{2}x^2} + 3y\,C$$

$$\Rightarrow \quad -3C\,y + (y+3)\,e^{\frac{3}{2}x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad k\,y + (y+3)\,e^{\frac{3}{2}x^2} = 0 \text{ , pues } -3c = k\,.$$

Problema 58 Resolver: $t\,dx\,(2\,x\,t^2\,Ln\,x + 1) = 2\,x\,dt$

Solución:

1) La ecuación dada, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{t\,.(2\,x\,t^2\,Ln\,x + 1)}{2x}$$

$$= t^3 Ln\,x + \frac{t}{2x}$$

$$\Rightarrow \; , \quad \frac{dt}{dx} - \frac{1}{2x}\,t = t^3\;Ln\,x$$

2) Tenemos: $n = 3$, $P(x) = -\frac{1}{2x}$, $Q(x) = \text{Ln}\,x$

3) Haciendo la sustitución: $z = t^{-3+1} = t^{-2}$

se obtiene una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{z'}{1-3} - \frac{1}{2x} z = Ln\, x$$

$$\Rightarrow \qquad z' + \frac{1}{x} z = -2\, Ln\, x \quad \left.\right\} \begin{array}{l} P(x) = 1/x \\ Q(x) = -2\, Ln\, x \end{array}$$

4) La solución, es: $z = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x) e^{\int P(x)\,dx} dx + C\right]$

5) Donde:

i) $\int P(x)\, dx = \int \frac{1}{x} dx = Ln\, x$

ii) $e^{-\int P(x)\, dx} = e^{-Ln\, x} = e^{Ln\, x^{-1}} = x^{-1}$

iii) $e^{\int P(x)\, dx} = e^{Ln\, x} = x$

6) Sustituir en (4): $z = x^{-1}\left[\int (-2\, Ln\, x)(x)\, dx + C\right]$

(6∗) $z = x^{-1}\left[-2 \underbrace{\int x\, Ln\, x\, dx}_{I} + C\right]$

Donde: $I = \int x\, Ln\, x\, dx = \frac{x^2}{2} Ln\, x - \frac{1}{2}\int x\, dx$

$$= \frac{x^2}{2} Ln\, x - \frac{1}{4}x^2 = \frac{x^2}{4}[2\, Ln\, x - 1]$$

INTEGRACIÓN POR PARTES:

$u = Ln\, x$ $\qquad dv = x\, dx$

$du = \frac{1}{x} dx \longleftarrow v = \frac{x^2}{2}$

7) Sustituir en (6∗): $z = x^{-1}\left[-2\left(\frac{x^2}{4}(2\, Ln\, x - 1)\right) + C\right]$

8) Pero: $z = t^{-2}$, entonces:

$$t^{-2} = -\tfrac{1}{2}x(2\,Ln\,x - 1) + x^{-1}C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{t^2} = -\frac{x}{2}(2\,Ln\,x - 1) + \frac{C}{x}$$

m.c.m $= 2\,xt^2$

$$\Rightarrow \quad 2\,x = -x^2\,t^2(2\,Ln\,x - 1) + 2\,C\,t^2$$

$$\Rightarrow \quad 2\,x = -2x^2\,t^2 Ln\,x + x^2\,t^2 + k\,t^2\,, \quad \text{pues } 2c = k$$

Problema 59 Resolver: $(2y + 1)\,dx = (2y^3\,x^2 + x^2\,y^2 - 2x)\,dy$

Solución:

1) Ordenado la ecuación diferencial obtenemos:

$(2y + 1)\,dx = (2y^3\,x^2 + x^2\,y^2)\,dy - 2x\,dy$

2) Dividir entre $(2y + 1)dy$, obtenemos:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2\,y^2\,(2y+1)}{(2y+1)} - \frac{2x}{2y+1} \quad , \quad y \neq -1/2$$

$$(2*) \qquad \boxed{\frac{dx}{dy} + \frac{2}{2y+1}\,x = x^2\;y^2} \qquad \begin{cases} P(y) = \frac{2}{2y+1} \\ Q(y) = y^2 \\ n = 2 \end{cases}$$

3) Haciendo: $z = x^{-2+1}$

$z = x^{-1}$

La ecuación diferencial (2∗) se transforma en:

$$\frac{z'}{1-2} + \frac{2}{2y+1}x = y^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z' - \frac{2}{2y+1}x = -y^2} \qquad \begin{cases} P(y) = -\frac{2}{2y+1} \\ Q(y) = -y^2 \end{cases}$$

(3∗)

4) La solución de (3∗) será de la forma:

$$z = e^{-\int P(y)dy}\left[\,\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy + C\right]$$

5) Donde:

i) $$\int P(y)\,dy = \int -\frac{2}{2y+1}\,dy = -Ln(2y+1)$$

ii) $$e^{-\int p(y)\,dy} = e^{Ln(2y+1)} = 2y+1$$

iii) $$e^{\int P(y)\,dy} = e^{-Ln(2y+1)} = e^{Ln(2y+1)^{-1}} = \frac{1}{2y+1}$$

6) Sustituir (5) en (4):

$$z=(2y+1)\left[\int (-y^2)\left(\frac{1}{2y+1}\right)dy+C\right]$$

$$z=(2y+1)\left[-\int \frac{y^2}{2y+1}dy+C\right] \quad \text{..............} \quad (6*)$$

7) Cálculo de: $I=\int \frac{y^2}{2y+1}dy=\int\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}+\frac{1/4}{2y+1}\right)dy=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{4}y+\frac{1}{8}Ln(2y+1)$

Dividir:

$$\begin{array}{r|l} y^2 & 2y+1 \\ \hline -y^2-\frac{1}{2}y & \frac{1}{2}y-\frac{1}{4} \\ \hline -\frac{1}{2}y & \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4} & \\ \hline \frac{1}{4} & \end{array}$$

8) Sustituir $z=x^{-1}$ y (7) en (6*):

$$x^{-1}=(2y+1)\left[-\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}Ln(2y+1)+C\right]$$

$$\frac{1}{x}=(2y+1)\left[\frac{-2y^2+2y-Ln(y+1)+8C}{8}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8}{x(2y+1)}=-2y^2+2y-Ln(2y+1)+8C$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2-2y+Ln(2y+1)+\frac{8}{x(2y+1)}=8C$$

Problema 60 Resolver: $y\,y' + y^2 \cdot \operatorname{cotg} x = \csc^2 x$

Solución:

1) Dividir entre y : $y' + y \cdot \operatorname{ctg} x = y^{-1} \csc^2 x$

2) Es una ecuación de Bernoulli, donde:

$\boxed{n = -1}$ y $z = y^{-(-1)+1}$

$$\boxed{z = y^2}$$

3) La ecuación (1) se transforma en:

$$\frac{z'}{1-(-1)} + z \cdot \operatorname{ctg} x = \csc^2 x$$

$\Rightarrow \quad z' + 2z \cdot \operatorname{ctg} x = 2\csc^2 x$ .... (3∗)

donde $\begin{cases} P(x) = 2\operatorname{ctg} x \\ Q(y) = 2\csc^2 x \end{cases}$

⋮

proseguir el problema:

La solución es: $\boxed{y^2 = \dfrac{2x + C}{\operatorname{sen}^2 x}}$

Problema 61 Resolver: $(4 - x^2)\, y' + 4y = (2 + x)\, y^2$

Solución:

1) Dividir entre $(4 - x^2)$, obtenemos:

$$y' + \frac{4}{4-x^2}\, y = \frac{2+x}{4-x^2}\, y^2$$

$$= \frac{\cancel{(2+x)}}{\cancel{(2+x)}(2-x)}\, y^2$$

$y' + \dfrac{4}{4-x^2}\, y = \dfrac{1}{2-x}\, y^2$ .... (1∗)

2) Tenemos: $n = 2$, Hacer $z = y^{-2+1}$

$$z = y^{-1}$$

$$\boxed{z = \frac{1}{y}}$$

y obtenemos una ecuación de la forma:

$$\frac{z'}{1-2} + \frac{4}{4-x^2} z = \frac{1}{2-x}$$

$$\Rightarrow \qquad z' - \frac{4}{4-x^2} z = -\frac{1}{2-x}$$

$$\Rightarrow \qquad z' + \frac{4}{x^2-4} z = \frac{1}{x-2} \qquad \begin{cases} P(x) = \frac{4}{x^2-4} \\ Q(x) = \frac{1}{x-2} \end{cases}$$

proseguir ....

La solución es: $$\boxed{\frac{1}{y} + \frac{2+x}{2-x}[C - Ln(2+x)]}$$

Problema 62 Resolver: $x\,dy + y\,dx = x\,y^2\,dx$

Solución:

1) Dividir entre $x\,dx$: $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = y^2$

2) Tenemos $n = 2$, hacer $z = y^{-2+1} = y^{-1}$ y obtenemos la ecuación diferencial :

$$\frac{z'}{1-2} + \frac{1}{x} z = 1$$

$$\Rightarrow \qquad z' - \frac{1}{x} z = -1 \quad \left.\right\} \begin{matrix} P(x) = -\frac{1}{x} \\ Q(x) = -1 \end{matrix}$$

3) Al resolver obtenemos: $xy\,\text{Ln}\,x + 1 = Cxy$

Problema 63 Resolver: $3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$

Solución:

1) Al dividir entre $3x$, obtenemos:

$$y' - \frac{2}{3x}y = \frac{x^2}{3y^2}$$

$$\Rightarrow \qquad y' - \frac{2}{3x}\,y = y^{-2}\,\frac{x}{3}$$

2) Tenemos: $n=-2$, haciendo $z = y^{-(-2)+1} = y^3$

Obtenemos otra ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{z'}{1-(-2)} - \frac{2}{3x}z = \frac{x^2}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{z' - \frac{2}{x}z = x^2} \qquad (2*) \quad \begin{cases} P(x) = -\frac{2}{x} \\ Q(x) = x^2 \end{cases}$$

3) Al resolver (2∗), obtenemos: $y^3 = C\,x^2 + x^3$

Problema 64 Resolver: $8xy' - y = -\dfrac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$

Solución:

1) Dividir entre $8x$: $\quad y' - \frac{1}{8x}y = -y^{-3}\frac{1}{8x\sqrt{x+1}}$

2) Tenemos: $n=-3$

3) Haciendo $z = y^{-(-3)+1} = y^4$, obtenemos otra ecuación de la forma:

$$\frac{z'}{1-(-3)} - \frac{1}{8x}z = -\frac{1}{8x\sqrt{x+1}}$$

$$z' - \frac{1}{2x}z = -\frac{1}{2x\sqrt{x+1}} \qquad \left.\begin{matrix} P(x) = -\frac{1}{2x} \\ Q(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x+1}} \end{matrix}\right\}$$

4) La solución es: $y^4 = C\sqrt{x} + \sqrt{x+1}$

Problema 65 Resolver: $x^2 y' + 2x^3 y = y^2 (1 + 2x^2)$

Solución:

1) Al dividir entre x^2, obtenemos: $y' + 2xy = y^2 \left(\frac{1+2x^2}{x^2}\right)$

2) Tenemos: $n = 2$

3) Haciendo $z = y^{-2+1} = y^{-1}$, obtenemos otra EC. de la forma:

$$\frac{z'}{1-2} + 2xz = \frac{1+2x^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad z' - 2xz = -\frac{1+2x^2}{x^2} \quad \left.\right\} \begin{array}{l} P(x) = -2x \\ Q(x) = -\frac{1+2x^2}{x^2} \end{array}$$

4) La solución es: $\boxed{\frac{1}{y} = Ce^{x^2} + \frac{1}{x}}$

2.4 APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

2.4.1 Aplicaciones a la Economía

Problema 66 La relación entre el precio "P" y la cantidad demandada "x" es tal que la tasa de disminución en la demanda, a medida que el precio aumenta, es proporcional a la cantidad demandada e inversamente proporcional a la suma del precio más una constante.

Encontrar la función de demanda si $p = 0$, cuando $x = x_0$.

Solución:

1) ***Datos:***
p = precio por unidad
x = cantidad de demanda
$dx = \Delta x$: Variación de la cantidad demandada.
$dp = \Delta P$: Variación del precio.
$\frac{dx}{dp}$ = tasa de la demanda a medida que el precio varía.

2) Según el enunciado del problema, tenemos:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{kx}{p+b} \begin{cases} \text{La tasa de } \overbrace{\text{disminución}}^{k \text{ negativo}} \text{ en la demanda, a medida que el precio} \\ \text{aumenta es } \textbf{\textit{proporcional}} \text{ a la cantidad demanda e inversamente} \\ \text{proporcional a la suma del precio más una constante.} \\ b : \text{Constante} \;\; , \; k : \text{Factor de proporcionalidad} \end{cases}$$

3) Nos queda por resolver la Ec. Diferencial: $\frac{dx}{dp} = \frac{kx}{p+b}$ .... (3∗)

que es una Ecuación de ***"VARIABLES SEPARABLES"***

Veamos:

De (3∗) obtenemos: $\frac{dx}{x} = \frac{k}{p+b}dp$

INTEGRANDO AMBOS MIEMBROS: $\int \frac{dx}{x} = k\int \frac{1}{p+b}dp + Ln\,C$

$$\Rightarrow \quad Ln\,x = k\,Ln(p+b) + Ln\,C$$

$$\Rightarrow \quad Ln(x) = Ln[(p+b)^k \cdot C]$$

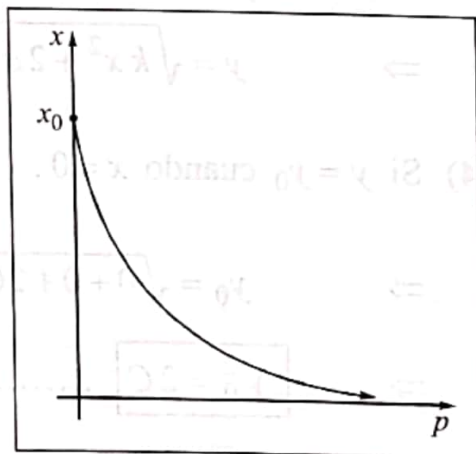
POR ANTILOGARITMO: $x = C(p+b)^k$, k : Negativo

Imponer la condicional inicial: si $p = 0$, $x = x_0$

$$x_0 = C\,b^k \;\rightarrow\; C = \frac{x_0}{b^k}$$

Entonces: $x = x_0\left[\frac{p+b}{b}\right]^k$, $k < 0$

Es mejor: $x = x_0\left[\frac{b}{p+b}\right]^k$, $k > 0$



Problema 67

La tasa de incremento del costo total "y", a medida que crece el número de unidades fabricadas "x", es proporcional a la suma de las unidades fabricadas más una constante, e inversiones proporcionales al costo total. Hallar la función de costo si $y = y_0$ cuando $x = 0$ Graficar la relación dada.

Solución:

1) ***Datos:***

Sean $y =$ costo total

$x =$ número de unidades fabricadas

$\frac{dy}{dx} =$ tasa de incremento de "y" a medida que crece "x".

sean "a" y "b" constantes, $k =$ factor de proporcionalidad.

2) Según el enunciado del problema, hacemos: $\frac{dy}{dx} = \frac{k(x+a)}{y}$ .... (2*)

Se pide hallar $y = f(x)$, si $y = y_0$ cuando $x = 0$.

3) La ecuación (2*) es el tipo "Variables Separables", que para integrar, se escribe de la forma siguiente: $y\,dy = k(x+a)dx$

INTEGRANDO AMBOS MIEMBROS:

$$\int y\,dy = k\int (x+a)\,dx + C$$

$$\frac{y^2}{2} = k\left(\frac{x^2}{2} + ax\right) + c$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = k(x^2 + 2ax) + 2C$$

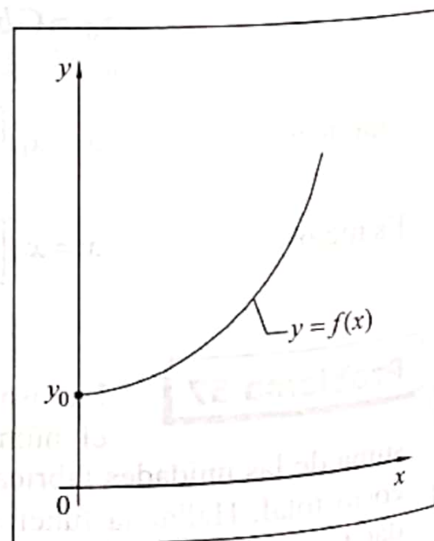
$$\Rightarrow \quad y^2 = kx^2 + 2akx + 2C$$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{kx^2 + 2akx + 2C} \quad \text{.....................(3*)}$$

4) Si $y = y_0$ cuando $x = 0$.

$$\Rightarrow \quad y_0 = \sqrt{0+0+2C} = \sqrt{2C}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_0^2 = 2C} \quad \text{.............. (4*)}$$



5) Sustituir (4*) en (3*):

$$y = \sqrt{kx^2 + 2akx + y_0^2}$$

Problema 68 La razón del incremento de las ventas "s" a medida que crece la gestión de propaganda "x" es igual a una constante menos la venta dividido por una constante más la gestión de propaganda. Hallar la relación entre las ventas y la gestión de propaganda, si $s = s_0$ cuando $x = 0$.

Gráficar la relación obtenida.

Solución:

Datos:

1) Sean $s =$ ventas, $x =$ gestión de propaganda

$\frac{ds}{dx} =$ Razón "del incremento de s a medida que crece x".

Sean "a" y "b" dos constantes.

2) Según el enunciado del problema, tenemos que: $\frac{ds}{dx} = \frac{a-s}{b+x}$

3) Resolvamos esta ecuación diferencial "por variables separables".

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a-s}\, ds = \frac{1}{b+x}\, dx$$

INTEGRADO:

$$\int \frac{1}{a-s}\, ds = \int \frac{1}{b+x}\, dx + C_1$$

$$\Rightarrow \quad -Ln\,(a-s) = Ln\,(b+x) + Ln\, C \ , \ C_1 = Ln\, C$$

$$\Rightarrow \quad Ln\,(a-s)^{-1} = Ln\,(C\,(b+x))$$

TOMANDO ANTILOGARITMO:

$$\Rightarrow \quad (a-s)^{-1} = c\,(b+x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a-s} = C\,(b+x)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C\,(b+x)\,(a-s) = 1} \qquad (3*)$$

Si $s = s_0$, cuando $x = 0 \Rightarrow C\,(b+0)\,(a-s_0) = 1$

$$\Rightarrow \quad C\, b\,(a-s_0) = 1$$

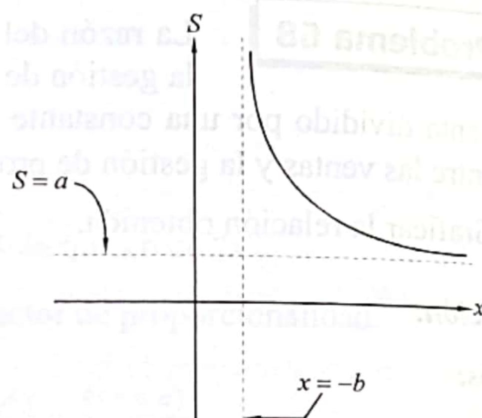
$$\Rightarrow \quad C = \frac{1}{b(a-S_0)} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (4)$$

5) sustituir (4) en (3*):

$$\frac{1}{b(a-s_0)}(b+x)(a-s)=1$$

$$\Rightarrow (x+b)\,(a-s)=b\,(a-s_0)$$

$$\Rightarrow (x+b)\,(s-a)=b\,(s_0-a)$$



Problema 69 El dinero depositado en cierto banco se incrementa de tal manera que en cualquier instante la razón de cambio del saldo es igual al 7% del saldo en ese instante.

Solución:

Sean $s(t)$: saldo en un instante t.

$\frac{ds}{dt}$: razón del cambio de saldo respecto al tiempo.

Según las condiciones dadas: $\frac{ds}{dt}=0.07\,s$

Escribiendo la ecuación de la forma de variable separable:

$$\frac{ds}{s}=0.07\,dt$$

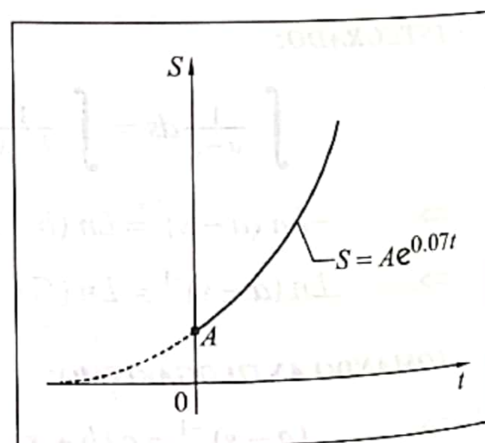
$$\Rightarrow \int \frac{ds}{s}=\int 0.07\,dt$$

$$Ln\,|\,s\,| = 0.07\,t+c \;,\; c = \text{constante}$$

$$s = e^{0.07\,t+c}$$

$$= e^{c}\,.\,e^{0.07t} \;,\; e^{c}=A$$

$$S(t) = A\,.\,e^{0.07t} \;,\; A>0$$



Problema 70 La relación entre el costo promedio "$\overline{y}$" y el número de unidades producidas "x" es tal que el cambio en el costo promedio a medida que crece el número de unidades es igual a la relación del número de unidades menos el costo promedio dividido por el número de unidades. Determinar la relación entre el costo promedio y el número de unidades producidas si $\overline{y}=\frac{9}{2}$ cuando $x=1$. Graficar la relación obtenida.

Solución:

1) ***Datos:*** $\overline{y} =$ costo promedio

$x =$ número de unidades producidas

$\frac{d\overline{y}}{dx} =$ cambio en el costo promedio $\overline{y}$ a medida que crece el número de unidades x.

2) Según el enunciado del problema, hacemos la siguiente ecuación:

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = \frac{x - \overline{y}}{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x\,d\overline{y} = (x - \overline{y})dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2*)$$

3) La Ecuación (2∗) es homogéneo de grado uno y resolvemos, haciendo:

$$\overline{y} = vx$$

$$\Rightarrow \quad d\overline{y} = v\,dx + x\,dv$$

4) Sustituir (3) en (2∗):

$$\Rightarrow \quad x\,(v\,dx + x\,dv) = (x - vx)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad x\,v\,dx + x^2\,dv = (x - vx)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad (xv - x + vx)\,dx + x^2\,dv = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2\,x\,v - x)\;dx + x^2\,dv = 0$$

$$\Rightarrow \quad x\,(2v - 1)\;dx + x^2\;dv = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4*)$$

5) La ecuación (4∗) se resuelve por Variables Separables.

Veamos:

Separando adecuadamente la Ecuación en (4∗): $\frac{x}{x^2}\,dx + \frac{1}{2v-1}\,dv = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2v-1}\,dv = 0$$

6) ***Integrando:*** $Ln\,x + \frac{1}{2}\,Ln\,(2v-1) = Ln\,C$

$$\Rightarrow \quad Ln\,[\,x\,(2v-1)^{1/2}\,] = Ln\,C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x\,(2v-1)^{1/2} = C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6*)$$

Como: $\bar{y} = vx \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{\bar{y}}{x}}$ .... (6**)

7) sustituir (6**) en (6*):

$$x\left(2\,\frac{\bar{y}}{x} - 1\right)^{1/2} = C$$

8) Tenemos la condición inicial $\bar{y} = \frac{9}{2}$, $x = 1$, que al sustituir en (7) obtenemos:

$$1\left(2\,\frac{9/2}{1} - 1\right)^{1/2} = C$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{8} = C$$

9) Al sustituir la constante $C = \sqrt{8}$ en (7):

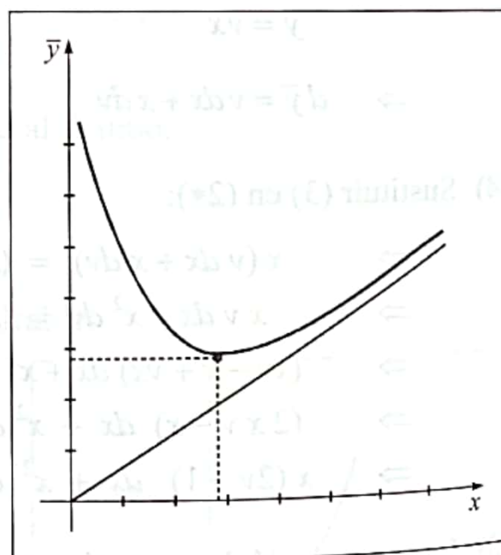
$$x\left(\frac{2\bar{y}}{x} - 1\right)^{1/2} = \sqrt{8}$$

Elevar al cuadrado: $x^2\left(\frac{2\bar{y}}{x} - 1\right) = 8$

$$\Rightarrow \qquad x^2\left(\frac{2\bar{y} - x}{x}\right) = 8$$

$$\Rightarrow \qquad x(2\bar{y} - x) = 8$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{x^2 + 8}{2x}}$$



Problema 71

La razón del incremento en el costo "*y*" a medida que crece el número de unidades fabricadas "*x*", es igual a la relación del doble del cuadrado del costo menos el cuadrado del número de unidades dividido por el producto del costo y el número de unidades. Hallar la relación entre el costo y el número de unidades fabricadas si $y = 3$ cuando $x = 1$.

Diagramar la solución obtenida.

Solución:

1) Datos: y = costo

x = número de unidades

$\frac{dy}{dx}$ = **RAZÓN** del incremento de y a medida que crece x.

2) Según el enunciado del problema, construimos la siguiente ecuación:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y^2-x^2}{yx} \iff y\,x\,dy = (2\,y^2-x^2)\,\underline{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2*)$$

3) La Ecuación Diferencial obtenida en (2) es homogénea de 2do grado.

Se resuelve, haciendo:

$$y = vx$$

$$\Rightarrow \quad dy = vdx + xdv$$

4) Sustituir en (2*):

$$(vx)\,x\,(vdx+xdv) = (2\,(vx)^2 - x^2)dx$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v^2x^2\;dx} + vx^3dv = \underline{(2v^2\;x^2 - x^2)\;dx}$$

$$\Rightarrow \quad (v^2\,x^2 - 2v^2\,x^2 + x^2)\;\;dx + vx^3\;dv = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x^2 - v^2\,x^2)\;dx + vx^3\;dv = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2\,(1-v^2)\;dx + v\,x^3\;dv = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4*)$$

5) La ecuación (4*) es de variables separables y resolvemos haciendo:

$$\frac{x^2}{x^3}dx + \frac{v}{1-v^2}dv = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x}dx + \frac{v}{1-v^2}dv = 0$$

6) ***Integrando:***

$$\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{v}{1-v^2}\,dv = C_1$$

$$\Rightarrow \quad Ln\,x - \tfrac{1}{2}Ln\,(1-v^2) = C_1$$

$$\Rightarrow \quad 2\,Ln\,x - Ln\,(1-v^2) = 2\,C_1 \;\;,\;\; \text{haciendo } 2C_1 = \text{Ln}\,C$$

$$\Rightarrow \quad Ln\,x^2 - Ln\,(1-v^2) = Ln\,C$$

$$\Rightarrow \quad Ln\left(\frac{x^2}{1-v^2}\right) = Ln\,C$$

Tomamos Antilogaritmo:

$$\Rightarrow \qquad \frac{x^2}{1-v^2} = C$$

$$\Rightarrow \qquad x^2 = C(1-v^2) \quad , \text{ pero } \; v = \frac{y}{x}$$

$$x^2 = C\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)$$

(6*) .... $x^4 = C(x^2 - y^2)$. Imponer la condición inicial cuando $x = 1$, $y = 3$ para hallar C.

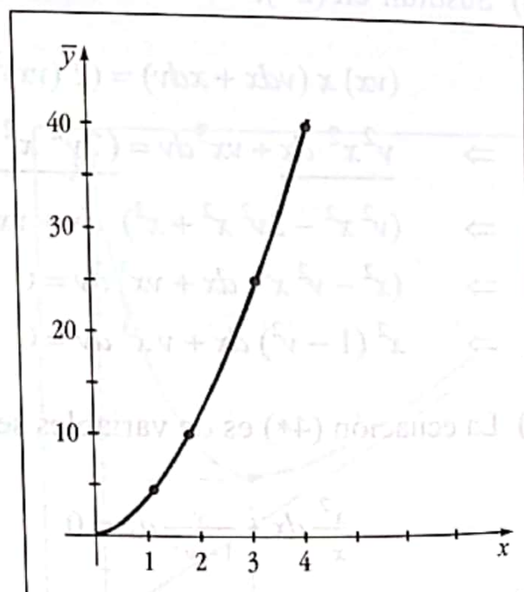
$$1 = C(1-9)$$

$$C = -\tfrac{1}{8}$$

En (6*): $\qquad x^4 = -\tfrac{1}{8}(x^2 - y^2)$

Despejar y: $\qquad y = x\sqrt{1+8x^2}$

└ el costo es función de la cantidad x.



Problema 72 Un fabricante ha encontrado que el cambio en el costo de distribución D, a medida que aumentan las ventas. S es igual a una constante multiplicada por las ventas, más otra constante. Si $D = 0$. Cuando $S = 0$, hallar D como una función de S y diagramar la relación obtenida.

Solución:

1) ***Datos:*** D = costo de distribución, a y b son constantes.

S = ventas

$\frac{dD}{dS}$ = cambio en D a medida que aumenta S.

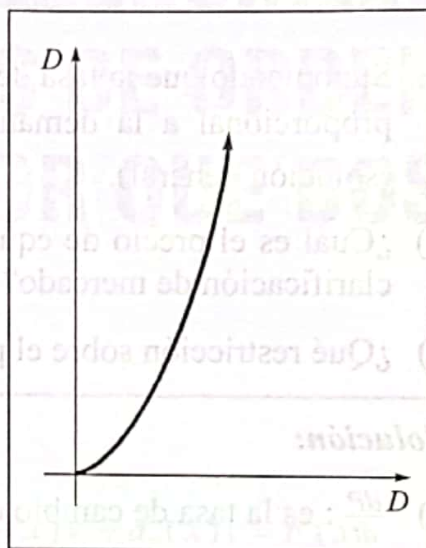
2) Según el enunciado del problema, construimos la siguiente ecuación:

$$\frac{dD}{dS} = aS + b \quad \Rightarrow \quad dD = (a\,S + b)\, ds$$

3) La ecuación diferencial, obtenida es fácil de resolver, integrando directamente:

$$\int dD = \int (aS + b)\, ds + C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D = a\frac{S^2}{2} + bS + C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3*)$$



4) Como $D = 0$ cuando $S = 0$, sustituir en $(3*)$:

$$\Rightarrow \quad 0 = 0 + 0 + C \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = 0}$$

Luego, la ecuación en $(3*)$ se hace:

$$\boxed{D = \frac{a}{2}S^2 + bS}$$ *que es una parábola* $a > 0$, $b > 0$.

Problema 73 El arrendamiento de un apartamento (dos alcobas, muebles "estándar") en un colegio varía con la distancia del apartamento al campus. Supóngase que esta relación está dada por:

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{k}{x} + a\right), \quad 1 \le x \le 10$$

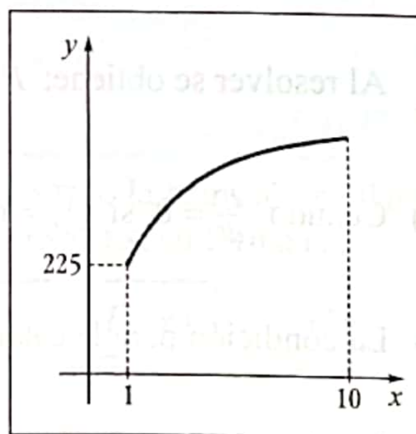
en que "y" es el arrendamiento mensual (en dólares) y "x" es la distancia (en millas), "k" y "a" son constantes si $y = 225$ cuando $x = 1$, hallar "y" como una función de "x" y diagramar la relación obtenida.

Solución:

1) Resolver la Ecuación Diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{k}{x} + a\right) \quad \Rightarrow \quad dy = -\left(\frac{k}{x} + a\right) dx$$

integrado: $\Rightarrow \quad y = -k\,Ln\,x - a\,x + C$ ...... $(1*)$



2) Pero $y = 225$, cuando

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 225 = -k\,Ln\,(1) - a + C$$
$$\Rightarrow \quad 225 = 0 - a + C$$
$$\Rightarrow \quad C = 225 + a$$

3) Sustituir en $(1*)$:

$y = -k\,Ln\,x - ax + 225 + a$	$1 \le x \le 10$

Problema 74 Sean la oferta y demanda.

$$Q_d = \alpha - \beta P + \sigma \frac{dP}{dt} \quad , \quad Q_s = -\gamma + \delta P \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0)$$

a) Suponiendo que la tasa de cambio de los precios respecto al tiempo es directamente proporcional a la demanda excedente, encuentre la trayectoria de tiempo $P(t)$ (solución general).

b) ¿Cuál es el precio de equilibrio intertemporal?. ¿Cuál es el precio de equilibrio de clarificación de mercado?

c) ¿Qué restricción sobre el parámetro σ aseguraría la estabilidad dinámica?

Solución:

a) $\frac{dP}{dt}$: es la tasa de cambio de los precios respecto al tiempo

$$Q_d - Q_s = \alpha + \gamma - (\beta + \delta)P + \sigma \frac{\delta P}{dt}$$

└── esta diferencia, es la demanda excedente.

Si K (positivo) es el factor de proporcionalidad, entonces el problema plantea que:

$$\frac{dP}{dt} = K(Q_d - Q_s)$$

$$\frac{dP}{dt} = K\left[\alpha + \gamma - (\beta + \delta)P + \sigma \frac{dP}{dt}\right]$$

Al ordenar y simplificar se obtiene la ecuación diferencial lineal:

$$\frac{dP}{dt} + \frac{K(\beta + \delta)}{1 - K\sigma} P = \frac{K(\alpha + \gamma)}{1 - K\sigma}$$

Al resolver se obtiene: $P(t) = Ae^{-\frac{K(\beta+\delta)}{1-K\sigma}} + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$

b) Cuando $\frac{dP}{dt} = 0$ si $Q_d = Q_s$, se obtiene $P = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$

c) La condición para la estabilidad dinámica es: $1 - K\sigma > 0 \iff \delta < \frac{1}{K}$

CAPÍTULO 3

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN DOS Y MAYOR QUE DOS

La ecuación diferencial lineal general de orden n.

3.1 DEFINICIÓN

Una ecuación diferencial de orden n tiene la forma:

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+.....+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=F(x)$$

Donde:

$a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, … , $a_n(x)$, $F(x)$ son funciones que depende sólo de x.

$$y^{(n)}=\frac{d^n y}{dx^n}\quad,\quad y^{(n-1)}=\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{n-1}}\quad,\quad ....\quad,\quad y''=\frac{d^2 y}{dx^2}\quad,\quad y'=\frac{dy}{dx}$$

si $n=1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}+a_1(x)y=F(x)$

si $n=2 \Rightarrow a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2 y=F(x)$

Ejemplos:

a) $xy''-3y'+2x^2 y = 3-x^3$ $\begin{cases} a_0(x)=x \\ a_1(x)=-3 \\ a_2(x)=2x^2 \\ F(x)=3-x^3 \end{cases}$

b) $y^{(4)}+xy=0$ $\begin{cases} a_0(x)=1 \\ a_1(x)=x\ ,\ F(x)=0 \end{cases}$

Si todos los coeficientes a_0, a_1, a_2, …… , a_n son **CONSTANTES**, la ecuación se llama **ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL CON COEFICIENTES CONSTANTES**, su forma es:

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+.......+a_{n-1}y'+a_ny=F(x) \qquad (2*)$$

Ejemplos:

$$y''+3y'+2y = x^2$$

$$3y^{(4)}-5y'''+y = e^{-x}+\text{sen}\,x$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2}=-\beta\frac{ds}{dt}-w^2s \qquad ó \qquad \frac{d^2 s}{dt^2}+\beta\frac{ds}{dt}+w^2s=0$$

Si en (2*) se tiene que $F(x) = 0$, entonces la ecuación

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + a_2\, y^{(n-2)} + \ldots\ldots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = 0$$

toma el nombre de **ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL HOMOGÉNEA DE COEFICIENTES CONSTANTES.**

Ejemplos:

$$y''- 2y'' - 3y' = 0$$

$$y'' - y' = 0$$

$$y^{(6)} + 4y^{(4)} + 4y^{(2)} = 0$$

3.2 POLINOMIO CARACTERÍSTICO Y ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

Dado una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes cuya forma general es:

$$a_0 y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + a_2\, y^{(n-2)} + \ldots.. + a_{n-1}\, y' + a_n = 0$$, tenemos que:

a) al polinomio $P(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots.. + a_{n-1}\, r + a_n$ se le denomina **POLINOMIO CARACTERÍSTICO**, y

b) a la ecuación $\boxed{a_0\, r^n + a_1\, r^{n-1} + a_2\, r^{n-2} + \ldots.. + a_{n-1}\, r + a_n = 0}$ ...... (4*)

se le denomina **ECUACIÓN CARACTERÍSTICA** de grado *n*. Por el teorema fundamental del álgebra, la ecuación (4*) tiene "*n*" raíces.

3.3 CLASES DE RAÍCES DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

Las raíces de la ecuación característica son de diversas formas y pueden presentarse 4 casos distintos, que son:

Caso 1 Las "*n*" raíces r_1 , r_2 , r_3 , ... , r_n son reales y distintas.
En este caso las soluciones básicas de la Ecuación (4*) son:

$\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, e^{r_3 x}, \ldots, e^{r_n x}\}$ y la solución general, es la combinación lineal:

$$y = C_1\, e^{r_1 x} + C_2\, e^{r_2 x} + \ldots\ldots + C_n\, e^{r_n x}$$

Ejemplo: Resolver $3y'' - 2y' - 8y = 0$

Paso 1. Formar la ECUACIÓN CARACTERÍSTICA: $3r^2 - 2r - 8 = 0$

Paso 2. Resolver:
$$\begin{matrix} 3r & & 4 \\ & \times & \\ r & & -2 \end{matrix}$$

entonces: $(3r+4)(r-2) = 0 \begin{cases} 3r+4=0 \Rightarrow \boxed{r=-\frac{4}{3}} \\ r-2=0 \Rightarrow \boxed{r=2} \end{cases}$

Paso 3. Las soluciones básicas son: $\{e^{-\frac{4}{3}x}, e^{2x}\}$

y la solución general es: $y = C_1 e^{-4/3x} + C_2 e^{2x}$

y, es la combinación lineal de las soluciones básicas.

Caso 2 Las raíces de la ecuación característica son reales, pero algunas de ellas se repiten (raíz múltiple). Supongamos que $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_k = \lambda$, de modo que:

$$(r-\lambda)^k \underbrace{(r-r_{k-1})(r-r_{k-1})\ldots\ldots(r-r_n)}_{n-k} = 0$$ mientras que las demás $n-k$ raíces son distintas.

El sistema fundamentalmente de las soluciones básicas son:

$\{\underbrace{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}}_{k-veces}, e^{r_{x-1}x}, \ldots, e^{r_n x}\}$ y la solución general es:

$$y = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x} + C_3x^2e^{\lambda x} + \ldots + C_kx^{k-1}e^{\lambda x} + C_{k+1}e^{r_k+1^x} + \ldots + C_ne^{r_n x}$$

Ejemplo: Resolver: $y^{IV} - 6y^{III} + 12y^{II} - 8y^{I} = 0$

Paso 1. La ecuación característica es:

$$r^4 - 6r^2 + 12r^2 - 8r = 0$$
$$r(r^3 - 6r^2 + 12r - 8) = 0$$
$$r(r-2)^3 = 0 \begin{cases} r = 0 \\ r = 2 \end{cases}$$ *ésta raíz se repite 3 veces.*

Paso 2. Por lo tanto: El sistema fundamental de soluciones son:

$$\{x^0e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}, e^{0x}\} = \{e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}, 1\}$$

y la solución general, es: $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3x^2e^{2x} + C_4$

Caso 3 Algunas de las raíces de la ecuación característica son imaginarios Supongamos que $r_1 = a + ib$, $r_2 = a - ib$, $r_3 = m + in$, $r_4 = m - in$ con $b \neq 0$, $n \neq 0$ sean las cuatro primeras raíces imaginarias (complejos) y las otras $(n-4)$, raíces $r_5, r_6, \ldots, r_n$ son números reales, entonces el sistema fundamental de soluciones básicas de la forma:

$$e^{ax}\cos(bx),\ e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$$

$$e^{mx}\cos(nx),\ e^{mx}\operatorname{sen}(nx)$$

$$e^{r_5 x},\ e^{r_6 x},\ \ldots\ldots,\ e^{r_{n-1}x},\ e^{r_n x}$$

y la solución general es:

$$y = C_1e^{ax}\cos(bx) + C_2e^{ax}\operatorname{sen}(bx) + C_3e^{mx}\cos(nx) + C_4e^{mx}\operatorname{sen}(nx) + C_5e^{r_5x} + \ldots + C_ne^{r_nx}$$

Ejemplo: Resolver $y''' - 3y'' + 12y' - 10y' = 0$

Paso 1. Formar la ecuación característica: $r^3 - 3r^2 + 12r - 10 = 0$

Paso 2. Resolver por **RUFFINI**:

1	1	−3	+12	−10
		1	−2	10
	1	−2	10	0

Luego : $r^3 - 3r^2 + 12r - 10 = 0$

es : $(r-1)(r^2 - 2r + 10) = 0$ ⟨ $r = 1$; $r^2 - 2r + 10 = 0$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

$$r = \frac{2 \pm 6i}{2}$$

$$r = 1 \pm 3i \begin{cases} r = 1 + 3i \\ r = 1 - 3i \end{cases}$$

Paso 3. Cuando las raíces son números complejos (en este caso son $r_1 = 1 + 3i$, $r_2 = 1 - 3i$), entonces las soluciones básicas son $\{e^x\cos 3x, e^x\operatorname{sen} 3x\}$.

La tercera raíz es $r_3 = 1$, entonces la solución básica es e^x.

CONCLUSIÓN: La solución general es la combinación lineal de las tres soluciones básicas esto es:

$$y = C_1 e^x \cos 3x + C_2 e^x \operatorname{sen} 3x + C_3 e^x$$

Caso 4 Si $r = a + ib$ es una raíz que se repite "k" veces, entonces $r_2 = \bar{r}_1 = a - ib$ también se repite "k" veces donde $k \leq \frac{n}{2}$; entonces el sistema fundamental de soluciones básicas son:

$$e^{ax} \cos bx\,,\ e^{ax} \operatorname{sen} bx\,,\ xe^{ax} \cos bx\,,\ xe^{ax} \operatorname{sen} bx\,, \ldots\ldots$$

$$\ldots x^{k-1} e^{ax} \cos bx, x^{k-1} e^{ax} \operatorname{sen} bx, e^{r_{2k+1} x}, \ldots, e^{r_n x}$$

En consecuencia, la solución general es:

$$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \operatorname{sen} bx + C_3 x e^{ax} \cos bx + C_4 x e^{ax} \operatorname{sen} bx + \ldots$$

$$\ldots + C_{2k-1} x^{k-1} e^{ax} \cos bx + C_{2k} x^{k-1} e^{ax} \operatorname{sen} bx + C_{2k+1} e^{r_{2k+1} x} + \ldots + C_n e^{r_n x}$$

Ejemplo: Resolver $y^{V} + 3y^{IV} + 2y^{III} + 6y^{II} + y^{I} + 3y = 0$

Solución:

Paso 1. El polinomio característico es: $r^5 + 3r^4 + 2r^3 + 6r^2 + r + 3 = 0$

Paso 2. Resolver ésta ecuación por el método de **RUFFINI**:

-3	1	3	2	6	1	3
		-3	0	-6	0	-3
	1	0	2	0	1	0

Luego la ecuación característica se puede escribir de la forma:

$$(r+3)(r^4 + 2r^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (r+3)(r^2+1)^2 = 0 \quad \begin{cases} r = -3 \\ r^2 + 1 = 0 \ \Rightarrow\ r = \pm i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (r+3)(r-i)^2(r+i)^2 = 0$$

Se repite 2 veces como factor

Paso 3.

1) De la raíz $r_1 = -3$, obtenemos la solución: e^{-3x}

2) De las raíces $r^2 = r^3 = i = 0 + i$, se obtiene las soluciones $\begin{cases} e^{0x}\cos x = \cos x \\ xe^{0x}\cos x = x\cos x \end{cases}$

3) De las raíces $r^4 = r^5 = -i = 0 - i$, se obtienen las soluciones $\begin{cases} e^{0x}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \\ xe^{0x}\operatorname{sen} x = x\operatorname{sen} x \end{cases}$

Paso 4. La solución general, será:

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2\cos x + C_3 x\cos x + C_4\operatorname{sen} x + C_5 x\operatorname{sen} x$$

$$y = C_1 e^{-3x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\operatorname{sen} x$$

3.4 PROBLEMAS

Problema 75 Formar las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas conociendo sus ecuaciones características .

a) $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

b) $2\lambda^2 - 3\lambda - 5 = 0$

c) $\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$

d) $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$

e) $\lambda^3 = 0$

Solución:

De **a)** obtenemos la ecuación diferencial: $y'' + 3y' + 2y = 0$

De **b)** obtenemos la ecuación diferencial: $2\lambda'' - 3\lambda' - 5\lambda = 0$

De **c)** $\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$

$\iff \lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = 0$

$\iff \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$, obtenemos la ecuación diferencial: $y''' + 3y'' + 2y' = 0$

De **d)** $(\lambda^2 + 1)^2 = 0 \iff \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

obtenemos la ecuación diferencial: $y^{IV} + 2y'' + y = 0$

De **e)** $\lambda^3 = 0$, obtenemos la ecuación diferencial: $y''' = 0$

Problema 76 Formar las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas si se conocen las raíces de sus ecuaciones características y escribir sus soluciones generales.

a) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$
b) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$
c) $\lambda_1 = 3 - 2i$, $\lambda_2 = 3 + 2i$
d) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$

Soluciones:

a) Si las raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$; entonces la ecuación característica es:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$
$$\iff \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial es: $y'' - 3y' + 2y = 0$
y la solución general será: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

b) Si las raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, entonces la ecuación característica es:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$$
$$\iff \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

Por tanto, la Ecuación diferencial es: $y'' - 2y' + y = 0$

y la solución general será: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$

c) Si las raíces son: $\lambda_1 = 3 - 2i$, $\lambda_2 = 3 + 2i$, entonces la ecuación característica es: $[\lambda - (3 - 2i)][\lambda - (3 + 2i)] = 0$

$$\iff \quad [(\lambda - 3) + 2i][(\lambda - 3) - 2i] = 0$$
$$\iff \quad (\lambda - 3)^2 - (2i)^2 = 0$$
$$\iff \quad \lambda^2 - 6\lambda + 9 - (-4) = 0$$
$$\iff \quad \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

Por tanto, la ecuación diferencial será: $y'' - 6y' + 13y = 0$ y la solución general, será: $y = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \operatorname{sen} 2x$.

d) Si las raíces son $\lambda = 1$, $\lambda = 1$, $\lambda = 1$, entonces la ecuación característica es:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda - 1)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

Por tanto, la ecuación diferencial será: $y''' - 3y'' + 3y - y = 0$ y la solución general, será:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$$

Problema 77 Resolver $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, si $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$.

Solución:

Paso 1. La ecuación característica es: $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$. Las raíces de ésta ecuación se pueden obtener por **DIVISIÓN SINTÉTICA** del siguiente modo:

1	1	−3	3	−1
		1	−2	1
1	1	−2	1	0
		1	−1	
1	1	−1	0	
		1		
	1	0		

Como vemos tiene como raíz $r = 1$ que se repite tres veces y por lo tanto la solución general será:

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x \quad \text{...........} \ (1*)$$

Paso 2. Ahora, de y hallemos tanto y' como y'':

De $\quad y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$, obtenemos:

$$y' = c_1 e^x + c_2 (e^x + x e^x) + c_3 (2x e^x + x^2 e^x)$$

$$y' = c_1 e^x + c_2 (1 + x) e^x + c_3 (2x + x^2) e^x$$

La segunda variable es:

$$y'' = c_1 e^x + c_2 [(1) e^x + (1+x) e^x] + c_3 [(2+2x) e^x + (2x+x^2) e^x]$$

$$y'' = c_1 e^x + c_2 (2+x) e^x + c_3 (2+4x+x^2) e^x$$

Paso 3.

Como $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x \quad \Rightarrow \quad \underbrace{y(0)}_{1} = c_1 e^0 + 0 + 0$

$$1 = c_1$$

Como $y' = c_1 e^x + c_2 (1+x) e^x + c_3 (2x+x^2) e^x \quad \Rightarrow \quad \underbrace{y'(0)}_{2} = c_1 e^0 + c_2 + 0$

$$2 = c_1 + c_2$$

Como $y'' = c_1 e^x + c_2 (2+x) e^x + c_3 (2+4x+x^2) e^x \quad \Rightarrow \quad \underbrace{y'''(0)}_{3} = c_1 + 2c_2 + 2c_3$

$$3 = c_1 + 2c_2 + 2c_3$$

Paso 4. Ahora hallemos los valores de c_1, c_2 y c_3. Tenemos las ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1 = 1 & \text{(I)} \\ C_1 + C_2 = 2 & \text{(II)} \\ C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 3 & \text{(III)} \end{cases}$$

Sustituir (I) en (II): $\quad 1 + c_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_2 = 1}$ …………… (IV)

Sustituir (I) y (IV) en (III): $\quad 1 + 2 + 2c_3 = 3$

$$3 + 2c_3 = 3$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c_3 = 0}$$

Paso 5.

Como $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ y $c_3 = 0$, sustituimos en (1*) y tenemos la solución particular:

$$y = e^x + x e^x$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = e^x (1+x)}$$

Problema 78 Resolver $y'' - 2y' + 2y = 0$, sabiendo que $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

Solución:

Paso 1. El polinomio característico es: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

Paso 2. Resolver ésta ecuación usando la formula $\lambda = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ obtenemos:

$$\lambda = \frac{2 - \sqrt{4 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} \qquad \lambda_1 = 1 + i$$
$$\lambda_2 = 1 - i$$

Paso 3. La solución general, será:

(I) $\boxed{y = c_1\, e^x \cos x + c_2\, e^x \operatorname{sen} x}$, derivando una vez, tenemos:

$$y' = c_1\,[e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x] + c_2\,[e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x]$$

(II) $\boxed{y' = c_1\, e^x (\cos x - \operatorname{sen} x) + c_2\, e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)}$

Paso 4. Usando las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ obtenemos:

De (I) : $\underbrace{y(0)}_{0} = c_1\, e^0 \cos 0 + c_2\, e^0 \operatorname{sen} 0$

$0 = c_1 + 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

De (II) : $\underbrace{y'(0)}_{1} = c_1\,(1 - 0) + c_2\,(0 + 1)$

$\boxed{1 = c_1 + c_2}$

Paso 5. Ahora, hallemos los valores de las constantes c_1 y c_2, de las ecuaciones:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 + c_2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c_2 = 1}$$

Paso 6. Sustituir los valores $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ en (I), obtenemos:

$\boxed{y = e^x \operatorname{sen} x}$

Problema 79 Resolver $y'' - 2y' + 3y = 0$, si $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Solución:

Paso 1. El polinomio característico es: $r^2 - 2r + 3 = 0$

Paso 2. Resolver por la formula: $r = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(3)}}{2(1)}$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

$$r = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}\,i}{2} \quad \begin{cases} r_1 = 1 + \sqrt{2}\,i \\ r_2 = 1 - \sqrt{2}\,i \end{cases}$$

Paso 3. La solución general será: $y = c_1 e^x \cos\sqrt{2}\,x + c_2 e^x \operatorname{sen}\sqrt{2}x$

Paso 4. Derivando:

$$y' = c_1\left[e^x \cos\sqrt{2}x - \sqrt{2}e^x \operatorname{sen}\sqrt{2}x\right] + c_2\left[e^x \operatorname{sen}\sqrt{2}x + \sqrt{2}e^x \cos\sqrt{2}x\right]$$

$$y' = c_1 e^x\left(\cos\sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,x\right) + c_2 e^x\left(\operatorname{sen}\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}\,x\right)$$

Paso 5. Usando las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$. Sustituyendo, respectivamente en el paso 3 y en el paso 4, obtenemos:

$$\underbrace{y(0)}_{1} = c_1 e^0 \cos 0 + c_2 e^0 \operatorname{sen} 0$$

(I) $1 = c_1 + 0$

$$\underbrace{y'(0)}_{3} = c_1(1-0) + c_2(\sqrt{2})$$

(II) $3 = c_1 + \sqrt{2}\,c_2$

De las ecuaciones (I) y (II), obtenemos:

$\boxed{c_1 = 1}$

$$3 = 1 + \sqrt{2}\,c_2 \quad \Rightarrow \quad 3 - 1 = \sqrt{2}\,c_2$$

$$\Rightarrow \quad 2 = \sqrt{2}\,c_2$$

$$\Rightarrow \quad c_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{2\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \sqrt{2}$$

Paso 6. Sustituir $c_1 = 1$ y $c_2 = \sqrt{2}$ en el paso 3:

$$y = e^x \cos\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,e^x \operatorname{sen}\sqrt{2}\,x$$

$$y = e^x\left(\cos\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,x\right)$$

3.5 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGÉNEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES

Definición

Una ecuación diferencial lineal NO homogénea de coeficientes constantes, tiene la forma:

$$a_0\,y^{(n)} + a_1\,y^{(n-1)} + a_2\,y^{(n-2)} + a_3\,y^{(n-3)} + \ldots\ldots + a_n\,y = f(x)$$

Donde: $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ son constantes (números) reales.

$f(x)$ es una función que pueden ser de diversas formas.

Por ejemplo pueden ser de las formas:

$f(x) = 8$

$f(x) = 3x + 5$

$f(x) = 12\,x^2 + 6\,x$

$f(x) = 30\,e^x \operatorname{sen} x$

$f(x) = x\cos x$

$f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$

$f(x) = e^{2x}(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$

$f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x$

$f(x) = 2\cos^2 4x$

$f(x) = x^2\,e^{-x}\cos x$, etc.

¿Cómo se resuelve una ecuación diferencial lineal **NO** homogénea de coeficientes constantes?

Para hallar la **SOLUCIÓN GENERAL** de una ecuación lineal **NO** homogénea de coeficientes constantes, se procede en tres tiempos:

a) En el primer tiempo, se halla la ***SOLUCIÓN COMPLEMENTARIA***, o sea la solución general de la ecuación homogénea correspondiente.

b) En el segundo tiempo, se procede a buscar la ***SOLUCIÓN PARTICULAR*** de la ecuación no homogénea.

c) En el tercer tiempo, se suma la solución complementaria más la solución particular. Así, habremos hallado la ***SOLUCIÓN GENERAL*** de la ecuación ***NO*** homogénea.

Es decir: $$Y_g = Y_c + Y_p$$

Solución general (Y_g) — *Solución complementaria (solución general de la ecuación homogénea.* (Y_c) — *Solución particular* (Y_p)

Todo lo concerniente al primer tiempo ya se discutió en las paginas anteriores, lo que a continuación haremos es la discusión, para hallar la solución ***PARTICULAR***.
Antes de entrar a dicha discusión, aclaremos con algunos

Ejemplos:

ECUACIÓN DIFERENCIAL	SOL. COMPLEMENTARIA	SOL. PARTICULAR	SOLUCIÓN GENERAL
$y''+3y'+2y=8$	$y_c=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$	$y_p=4$	$y_g=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+4$
$y''-y'=e^x$	$y_c=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$	$y_p=-\frac{x}{2}e^{-x}$	$y_g=c_1e^{x}+c_2e^{-x}-\frac{x}{2}e^{-x}$
$y''-6y'+9y=25e^x \operatorname{sen} x$	$y_c=(c_1+c_2x)\,e^{3x}$	$y_p=e^x(4\cos x+3\operatorname{sen} x)$	$y_g=(c_1+c_2x)e^{3x}+e^x(4\cos x+3\operatorname{sen} x)$

¿Cómo obtener una solución particular?

Para hallar la solución particular, existen por lo menos 6 métodos, estos son:

I. El método de los coeficientes indeterminados.

II. El método aniquilador.

III. El método de selección (que es una excepción del método de los coeficientes indeterminados).

IV. *CASOS*: donde funciones más complicadas aparecen en el lado derecho:

$$a_0 y^{(n)} + ... + a_n y = f(x)$$

Lado derecho

V. El método de variación de Parámetros (Método de Lagrange).

VI. Métodos abreviados involucrando operadores.

De estos 6 métodos, trataremos con especial énfasis el método III por ser el más manuable, si cabe la expresión.

III. EL MÉTODO DE SELECCIÓN

REGLA. Para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes, cuya forma es:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x)$$

se procede del siguiente modo:

Paso 1. Hallar y escribir la solución complementaria y_c.

Paso 2. Asumir una ***solución particular*** correspondiente al segundo miembro de la ecuación, cuya forma será similar a la función $f(x)$ que se tiene en el segundo miembro de la **E.D.**

Para ello, tener en cuenta el siguiente cuadro de las formas de soluciones particulares para distintas formas del segundo miembro:

	FORMA DEL 2DO MIEMBRO $f(x)$	RAÍCES DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA	FORMA DE LA SOLUCIÓN PARTICULAR $k = \text{máx}\ \{m, n\}$
(I)	$P_m(x)$ ↑ *Polinomio de grado m.*	1. El número cero, no es raíz de la ecuación característica	$\widetilde{P}_m(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots. A_{m-1}x + A_m$
		2. El número cero es raíz de la ecuación característica de orden "s"	$x^s\widetilde{P}_m(x) = x^s(A_0x^m + \ldots\ldots + A_m)$
(II)	$P_m(x)\,e^{\alpha x}$ $\alpha \in IR$	1. El número "α" no es raíz de la ecuación característica.	$e^{\alpha x}\widetilde{P}_m(x) = e^{\alpha x}(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots. + A_m)$
		2. El número "α" es raíz de la ecuación característica de orden "s"	$x^s e^{\alpha x}\widetilde{P}_m(x) = x^s e^{\alpha x}(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m)$
(III)	$P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\,\text{sen}\,\beta x$	1. Los números $\pm i\beta$ no son raíces de la ecuación característica .	$\widetilde{P}_k(x)\cos Bx + \widetilde{Q}_x(x)\,\text{sen}\,Bx$ $k = \text{máx}\ \{n, m\}$
		2. Los números $\pm i\beta$ son raíces de la ecuación característica de orden "s".	$x^s[\widetilde{P}_k(x)\cos Bx + \widetilde{Q}_k(x)\,\text{sen}\,Bx]$ $k = \text{máx}\ \{m, n\}$
(IV)	$e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\,\text{sen}\,\beta x]$	1. Los números $\alpha \pm i\beta$ no son raíces de la ecuación característica.	$e^{\alpha x}[\widetilde{P}_k(x)\cos Bx + \widetilde{Q}_k(x)\,\text{sen}\,Bx]$ $k = \text{máx}\ \{m, n\}$
		2. Los números $\alpha \pm i\beta$ son raíces de la ecuación característica de orden "s".	$x^s e^{\alpha x}[\widetilde{P}_k(x)\cos Bx + \widetilde{Q}_k(x)\,\text{sen}\,Bx]$ $k = \text{máx}\ \{m, n\}$
	Ejemplos Particulares		
	$x^2 + x$		$A_1x^2 + A_2 + A_3$, $A_1 = ?$, $A_2 = ?$, $A_3 = ?$
	$\text{sen}\ rx$		$a\ \text{sen}\ rx$, $a = ?$
	$\cos rx$		$b\cos rx$, $b = ?$
	$\text{sen}\ rx + \cos rx$		$a\ \text{sen}\ rx + b\cos rx$, $a = ?$, $b = ?$
	e^{rx}		$a\,e^{rx}$, $a = ?$
	$25\,e^x\,\text{sen}\,x$		$e^x(a\cos x + b\ \text{sen}\,x)$, $a = ?$, $b = ?$

Paso 3. Escribir la forma asumida para la solución (última columna del cuadro anterior) para la solución particular y hallar los coeficientes incógnitas . Así obtenemos y_P .

Paso 4. Sumar Y_c con Y_p para obtener la solución general. Aclaremos todo esto, con diversos ejemplos.

Problema 80

Determinar las forma de la solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea, si se conocen las raíces de su ecuación característica y el segundo miembro $f(x)$:

(1) $\lambda_1 = 1 \;,\; \lambda_2 = 2 \;;\; f(x) = ax^2 + bx + c$

Solución:

1) La solución complementaria será $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

2) La solución particular debe ser de la forma: $y_p = A_1 x^2 + A_2 x + A_3$

(2) $\lambda_1 = 0 \;,\; \lambda_2 = 0 \;,\; f(x) = 3x^2 - x$

Solución: Es el caso I.2 (ver el cuadro)

i) Por tanto, la solución complementaria será: $y_c = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x}$

$$y_c = c_1 + c_2 x$$

ii) La solución particular será:

$$Y_p = x^2 (ax^2 + bx + c)$$
$$Y_p = ax^4 + bx^3 + cx^2$$

(3) $\lambda = 1 \;,\; \lambda = 2 \;,\; f(x) = e^{-x}(ax + b)$

Solución: Es el caso II.1, por tanto, la solución particular tendrá la forma:

$$Y_p = e^{-x}(A_1 x + A_2)$$

(4) $\lambda_1 = -1 \;,\; \lambda_2 = 1 \;,\; f(x) = e^{-x}(ax + b)$

Solución: Es el caso II.2 porque la raíz $\lambda_1 = -1$ coincide con el coeficiente del exponente de la exponencial e^{-x}.

Dicho de otra manera:

i) La solución complementaria es: $Y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$

↑ es el termino e^{-x} que aparece en $f(x) = e^{-x}(ax + b)$.

ii) Por tanto la forma de la solución particular, será: $Y_p = x\,e^{-x}(A_1x + A_2)$

$$Y_p = e^{-x}(A_1x^2 + A_2x)$$

⑤ $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$, $f(x) = e^{-x}(ax + b)$

Solución:

Como la raíz $\lambda_1 = -1$ se repite dos veces (caso II.2), entonces la solución particular tendrá la forma:

$$Y_p = x^2 e^{-x}(A_1x + A_2)$$

$$Y_p = e^{-x}(A_1x^3 + A_2x^2)$$

⑥ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$; $f(x) = \text{sen}\,x + \cos x$

Solución:

Es el caso III.1, por lo tanto; la forma de la solución particular será:

$$Y_p = a\,\text{sen}\,x + b\cos x$$

⑦ $\lambda_1 = -2i$, $\lambda_2 = 2i$; $f(x) = A\,\text{sen}\,2x + B\cos 2x$

Solución:

Estamos en el caso III.2, porque la componente imaginaria de $\lambda = 2i$ coincide con el coeficiente de "$2x$" del arco sen $2x$ y $\cos 2x$ en la función $f(x)$.

Por tanto, la forma de la solución particular será: $Y_p = x\,(A_1\,\text{sen}\,2x + A_2\cos 2x)$

⑧ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$; $f(x) = e^{-x}(A\,\text{sen}\,x + B\cos x)$

Solución:

Estamos en el caso IV.1, por tanto, la forma de la solución particular será:

$$Y_p = e^{-x}(A_1\,\text{sen}\,x + B_1\cos x)$$

⑨ $\lambda_1 = -1 - i$, $\lambda_2 = -1 + i$; $f(x) = e^{-x}(A\,\text{sen}\,x + B\cos x)$

Solución:

Estamos en el caso IV.1, luego la forma de la solución particular será:

$$\lambda_p = x\,e^{-x}(A_1\,\text{sen}\,x + B_1\cos x)$$

(10) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $f(x) = ax^2 + bx + c$

Solución:

Estamos en el caso I.1, por tanto la solución particular, será: $Y_p = A_1 x^2 + A_2 x + A_3$.

(11) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$

Solución:

Estamos en el caso I.2, por tanto, la forma de la solución particular, será:

$$Y_p = x^3 (A_1 x^2 + A_2 x + A_3)$$

$$Y_p = A_1 x^5 + A_2 x^4 + A_3 x^3$$

Determinar la forma de la solución particular para las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas:

Problema 81 $y'' + 3y' = 3$

Solución:

La forma de la solución particular, depende de dos cosas:
De la forma de las raíces de la ecuación característica, y de la forma del segundo miembro $f(x)$.

Veamos:

1) La ecuación característica es: $\lambda^2 - 3\lambda = 0$

$$\Rightarrow \quad \lambda(\lambda - 3) = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

2) Como el segundo miembro es $f(x) = 3$ y existe una raíz que es el número cero "0" entonces la forma de la solución particular es:

$$y_p = x(A) \qquad \textbf{(CASO I.2)}$$

$$y_p = Ax$$

Problema 82 $y'' - 7y' = (x-1)^2$

Solución:

1) La ecuación característica es:

$$\lambda^2 - 7\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 7) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 7 \end{cases}$$

2) Como existe una raíz, que es el cero y el segundo miembro es

$f(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$; entonces la solución particular tiene la forma:

$$Y_p = x(A_1 x^2 + A_2 x + A_3)$$

$$Y_p = A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x$$

Problema 83 $y'' + 7y' = e^{-7x}$

Solución:

1) La ecuación característica es:

$$\lambda^2 + 7\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda + 7) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -7 \end{cases}$$

2) Es el caso II.2 (ver el cuadro), puesto que una raíz es el número -7 y el segundo miembro es $f(x) = e^{-7x}$.

Entonces la solución particular tiene la forma: $Y_p = x(Ae^{-7x}) = Axe^{-7x}$

Problema 84 $y'' - 8y' + 16y = (1-x)e^{4x}$

Solución:

1) La ecuación característica es: $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$

$$\Rightarrow (\lambda - 4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 4$$

2) estamos en el caso II.2, puesto que el segundo miembro es un polinomio de primer grado multiplicado por una exponencial cuyo exponente "$4x$" es tal que su coeficiente "4" coincide con la raíz $\lambda = 4$ que se repite dos veces.

Por tanto, la forma de la solución particular será: $y_p = x^2 (A_1 x + A_2) e^{4x}$

$$y_p = (A_1 x^3 + A_2 x^2) e^{4x}$$

Problema 85 $y'' + 25y = \cos 5x$

Solución:

1) La ecuación característica es: $\lambda^2 + 25 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -25$

$\Rightarrow \lambda = \pm 5i$

2) Como el segundo miembro es $f(x) = \cos 5x$ estamos en el caso III.2, luego la forma de la solución particular será:

coincide con el coeficiente5 del número complejo 5i.

$$y_p = x [A_1 \cos 5x + A_2 \operatorname{sen} 5x]$$

Problema 86 $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 2x$

Solución:

1) La ecuación característica es:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(13)}}{2(1)}$$

coincide con el coeficiente del exponente: e^{-3x}

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i$$

coincide con 2x que es el arco de cos 2x

2) Estamos en el caso IV.2, luego la solución particular tiene la forma:

$$y_p = x e^{-3x} (A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x)$$

Problema 87 Resolver la siguiente ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 2$

Hallemos, en primer lugar, la solución complementaria:

1) La ecuación característica es: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1}$

Como vemos: "–1" es una raíz que se repite dos veces, por lo tanto, la solución complementaria será:

$$y_c = c_1\, e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x}$$

2) El segundo miembro $f(x) = 2$, es un polinomio de **GRADO CERO** (o sea una constante), entonces la solución particular tiene la forma:

$$y_p = A$$

Debe hallarse el valor de A.

3) Para hallar el valor de A, se debe reemplazar $y_p = A$ en el primer miembro de la ecuación diferencial; teniendo en cuenta que:

si $y_p = A \quad \Rightarrow \quad y'_p = 0 \quad , \quad y''_p = 0$

veamos; $0 + 2(0) + A = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 2}$

4) Luego $y_p = 2$

5) La solución general, será: $y = y_c + y_p$

$$y = c_1\, e^{-x} + c_2\, x e^{-x} + 2$$

Problema 88 Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y^{\text{IV}} + 2\,y''' + y'' = e^{-x}$$

Solución:

En primer lugar, hallemos la solución complementaria:

1) La ecuación característica es: $\lambda^4 + 2\,\lambda^3 + \lambda^2 = 0$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2\,(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2\,(\lambda + 1)^2 = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

2) Porque el "cero" es una raíz de multiplicidad dos y "–1", también, es una raíz de multiplicidad dos, la solución complementaria tiene la forma:

$$y_c = c_1\, e^{0x} + c_2\, x e^{0x} + c_3\, e^{-x} + c_4\, x e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad y_c = c_1 + c_2\, x + c_3\, e^{-x} + c_4 x e^{-x}$$

Ahora, hallemos la solución particular:

3) El segundo miembro es $f(x)=e^{-x}$ y $\lambda=-1$ es una raíz que se repite dos veces, además $\lambda=-1$ es el coeficiente del exponente de $f(x)=e^{-x}$; entonces la solución particular tendrá la forma:

$$y_p = x^2(Ae^{-x})$$

$$y_p = Ax^2e^{-x} \qquad \text{(CASO: II.2)}$$

4) Hallar el valor de A:

Para ello, hallar: y_p'', y_p''', y_p^{IV} y sustituir en la **E.D.**

Se obtiene $A=\frac{1}{2}$. Entonces: $y_p=\frac{1}{2}x^2e^{-x}$

Luego: $y=y_c+y_p$

$$y=c_1+c_2x+c_3e^{-x}+c_4xe^{-x}+\tfrac{1}{2}x^2e^{-x}.$$

Problema 89 Resolver la sigte. ecuación diferencial: $y''+4y'+4y=8\,e^{-2x}$

Solución:

Hallemos en primer lugar la solución complementaria:

1) La ecuación característica es: $\lambda^2+4\lambda+4=0 \Rightarrow (\lambda+2)^2=0 \Rightarrow \lambda=-2$

2) Como $\lambda=-2$ es una raíz de multiplicidad dos, entonces la solución complementaria será:

$$y_c=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$$

Ahora, hallemos la solución particular:

3) Como el segundo miembro es $f(x)=8e^{-2x}$ y $\lambda=-2$ coincide con el coeficiente de la exponencial e^{-2x}, entonces la solución particular tendrá la forma:

$$y_p=x^2(Ae^{-2x})=Ax^2e^{-2x}$$

4) Debemos hallar el valor de "A". Para ello hallemos la primera y segunda derivada de y_p.

Veamos: $y_p = Ax^2e^{-2x}$

$$y'_p = A(2xe^{-2x} + x^2(-2)\,e^{-2x}) = 2Axe^{-2x}(1-x)$$

$$y''_p = 2A[(1)\,e^{-2x}(1-x) + x(-2)\,e^{-2x}(1-x) + xe^{-2x}(-1)]$$

$$y''_p = 2Ae^{-2x}[1-x-2x(1-x)-x]$$

$$y''_p = 2Ae^{-2x}[1-x-2x+2x^2-x]$$

$$y''_p = 2Ae^{-2x}[1-4x+2x^2]$$

5) Ahora sustituir las funciones y_p , y'_p, y''_p en la ecuación diferencial dado en el problema. Así obtendremos:

$$2Ae^{-2x}(1-4x+2x^2) + 4[2Axe^{-2x}(1-x)] + 4(Ax^2e^{-2x}) = 8e^{-2x}$$

$$2Ae^{-2x}(1-4x+2x^2+4x-4x^2+2x^2) = 8e^{-2x}$$

$$2Ae^{-2x} = 8e^{-2x}$$

Igualando los coeficientes: $2A = 8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 4}$

6) Por tanto, la solución particular será: $y_p = 4x^2e^{-2x}$ y la solución general será: $y = (c_1 + c_2x)\,e^{-2x} + 4x^2e^{-2x}$

Problema 90 Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$2y''' - 5y' + 3y = 3x^2\,e^{2x}$$

Solución:

Hallemos la solución complementaria:

1) La ecuación característica es: $2\lambda^3 - 5\lambda + 3 = 0$

Resolvamos por el método de **RUFFINI**:

1	2	0	−5	3
		2	2	−3
	2	2	−3	0

De la ecuación $2\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, obtenemos:

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{4} \quad \begin{cases} \lambda_2 = (-1+\sqrt{7})/2 \\ \lambda_3 = (-1-\sqrt{7})/2 \end{cases}$$

La primera raíz es $\lambda_1 = 1$.

2) La solución complementaria será:

$$y_c = C_1 e^x + C_2 e^{x(-1+\sqrt{7})/2} + C_3 e^{-x(1-\sqrt{7})/2}$$

Ahora, hallemos la solución particular.

3) Como el segundo miembro es $f(x) = 3x^2 e^{2x}$, y no hay ninguna relación con las raíces de la ecuación característica, entonces la solución particular tendrá la forma:

$$y_p = (Mx^2 + Nx + P)e^{2x} \Bigg\} \text{Puesto que } x^2 \text{ implica formar: } Mx^2 + Nx + P$$

Debemos hallar los valores de M, N y P.

4) De $y_p = (Mx^2 + Nx + P)e^{2x}$, obtenemos:

$$y'_p = (2Mx + N)e^{2x} + (Mx^2 + Nx + P)(2e^{2x})$$

$$y'_p = (e^{2x}(2Mx + N + 2Mx^2 + 2Nx + 2P)$$

$$y'_p = e^{2x}(2Mx^2 + 2(M+N)x + N + 2P)$$

$$y''_p = 2e^{2x}(2Mx^2 + 2(M+N)x + N + 2P) + e^{2x}(4Mx + 2(M+N))$$

$$y''_p = 2e^{2x}[2Mx^2 + \underline{2(M+N)x} + N + 2P + \underline{2Mx} + M + N]$$

$$y''_p = 2e^{2x}(2Mx^2 + (4M+2N)x + (2N + M + 2P))$$

$$y_p'''=4e^{2x}\left(2Mx^2+(4M+2N)x+(2N+M+2P)\right)+2e^{2x}\left(4Mx+4M+2N\right)$$

$$y_p'''=4e^{2x}\left(2Mx^2+(4M+2N)x+(2N+M+2P)+2Mx+2M+N\right)$$

$$y_p'''=4e^{2x}\left(2MxX^2+(6M+2N)x+(3M+3N+2P)\right)$$

5) Sustituir y_p , y_p' , y_p''' , en la ecuación original:

$$2y_p'''-5y_p'+3y_p=3x^2e^{2x}$$

$$8e^{2x}(2Mx^2+(6M+2N)x+(3M+3N+2P))-5e^{2x}(2Mx^2+2(M+N)x+$$
$$N+2P)+3e^{2x}(Mx^2+Nx+P)=3x^2e^{2x}$$

Por identidad, simplificamos e^{2x} en ambos miembros y obtenemos:

$$16Mx^2+8(6M+2N)x+8(3M+3N+2P)-10Mx^2-10(M+N)x-5N-10P$$
$$+3Mx^2+3Nx+3P=3x^2$$

Simplificamos: $9Mx^2+(38M+9N)x+(24M+19N+9P)=3x^2$

Igualando coeficientes:

$9M=3 \quad \Rightarrow \quad M=1/3$

$38M+9N=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{38}{3}+9N=0 \Rightarrow 38+27N=0 \Rightarrow N=-\frac{38}{27}$

$24M+19N+9P=0 \quad \Rightarrow \quad 8+19\left(-\frac{38}{27}\right)+9P=0$

$\Rightarrow \quad 216-722+243P=0$

$\Rightarrow \quad -506+243P=0$

$\Rightarrow \quad \boxed{P=\frac{506}{243}}$

6) Sustituir los valores de M, N y P en (4): $y_p = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{38}{27}x + \frac{506}{243}\right)e^{2x}$

7) En consecuencia la solución general será: $y = y_c + y_p$

Problema 91 Resolver: $y'' + 5y' + 4y = 9e^{-x} + 4x$

Solución:

1) La ecuación característica es:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$$
$$(\lambda+4)(\lambda+1) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

2) Por tanto, la solución complementaria será: $y_c = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x}$

3) La forma de la solución particular depende de la forma del segundo miembro

$f(x) = 9\,e^{-x} + 4x$

Así, tendremos la siguiente combinación lineal: $y_p = Axe^{-x} + (Bx + C)$

4) Ahora, hallemos y'_p, y''_p de $y_p = Axe^{-x} + Bx + C$

$$y'_p = A(e^{-x} + xe^{-x}(-1)) + B$$
$$y'_p = A(e^{-x} - xe^{-x}) + B$$
$$y''_p = A[-e^{-x} - (e^{-x} + xe^{-x}(-1))] + 0$$
$$y''_p = A[-e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x}]$$
$$y''_p = A[-2e^{-x} + xe^{-x}]$$

5) Sustituir y''_p, y'_p, y_p en la ecuación original: $y''_p + 5y'_p + 4y_p = 9e^{-x} + 4x$

$$\Rightarrow A[-2e^{-x} + xe^{-x}] + 5A(e^{-x} - xe^{-x}) + 5B + 4A\;x\;e^{-x} + 4Bx + 4C = 9e^{-x} + 4x$$

$$\Rightarrow -2Ae^{-x} + Axe^{-x} + 5Ae^{-x} - 5Axe^{-x} + 5B + 4Axe^{-x} + 4Bx + 4C = 9e^{-x} + 4x$$

$$\Rightarrow 3Ae^{-x} + 4Bx + (5B + 4C) = 9e^{-x} + 4x$$

6) Igualando coeficientes: $3A = 9 \Rightarrow A = 3$

$4B = 4 \Rightarrow B = 1$

$5B + 4C = 0 \Rightarrow 5 + 4C = 0 \Rightarrow C = -5/4$

7) Sustituir los valores de A, B y C en (4): $\boxed{y_p = xe^{-x} + x - 5/4}$

8) La solución general será: $y = y_c + y_p$

$$\Rightarrow \boxed{y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x} + 3xe^{-x} + x - 5/4}$$

Problema 92 Resolver: $y'' + 5y' + 6y = 10(1-x)e^{-2x}$

Solución:

1) La ecuación característica es:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0 \qquad \begin{matrix} \lambda = -3 \\ \lambda = -2 \end{matrix}$$

$\lambda = -2$ ← Coincide con el coeficiente del exponente de e^{-2x} que es un factor del segundo miembro: $f(x) = 10(1-x)e^{-2x}$

2) Luego, la solución complementaria, será:

$$\boxed{y_c = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}}$$

Ahora, busquemos la solución particular.

La forma de la solución particular depende de la forma del segundo miembro y también de la raíces de la ecuación característica.

Veamos:

3) El segundo miembro es: $f(x) = 10(1-x)e^{-2x}$ (es el caso II.2)

polinomio de 1er. grado → $(1-x)$; *exponencial* → e^{-2x}

Entonces la forma de la solución particular es:

$$y_p = x(Ax+B)e^{-2x}$$

(3*) .... $$y_p = (Ax^2+Bx)\,e^{-2x}$$

4) Hallemos: $y'_p \;,\; y''_p$

De: $y_p = (Ax^2+Bx)e^{-2x}$

obtenemos: $y'_p = (2Ax+B)e^{-2x} + (Ax^2+Bx)\,e^{-2x}(-2)$

$$y'_p = e^{-2x}(\underline{2Ax}+B-2Ax^2-\underline{2Bx})$$

$$y'_p = e^{-2x}(-2Ax^2+(2A-2B)\,x+B)$$

$$y''_p = -2e^{-2x}(-2Ax^2+(2A-2B)\,x+B)+e^{-2x}(-4Ax+2A-2B)$$

$$y''_p = e^{-2x}(4Ax^2-2\,(2A-2B)\,x-2B-4Ax+2A-2B)$$

$$y''_p = e^{-2x}\,(4Ax^2-8Ax+4Bx+2A-4B)$$

5) Sustituir (4) en la ecuación diferencial original:

$$y''_p+5y'_p+6y_p+6y_p = 10\,(1-x)\,e^{-2x}$$

$$\Rightarrow\; e^{-2x}(4Ax^2-8Ax+4Bx+2A-4B)+5e^{-2x}(-2Ax^2+2Ax-2Bx+B)$$

$$+6\,(Ax^2+Bx)\,e^{-2x} = 10\,(1-x)\,e^{-2x}$$

Simplificando e^{-2x} en ambos miembros, obtenemos:

$$\underline{4Ax^2}-\underline{8Ax}+\underline{\underline{4Bx}}+2A-\widehat{4B}-\underline{10Ax^2}+\underline{10Ax}-\underline{\underline{10Bx}}+\widehat{5B}+\underline{6Ax^2}+\underline{\underline{6Bx}} = 10(1-x)$$

$$\Rightarrow \qquad 2Ax+2A+B = 10-10x$$

6) porque el polinomio del primer miembro es idéntico al polinomio del segundo miembro, igualamos los coeficientes.

Así tendremos:

$$2A=-10 \quad\Rightarrow\quad \boxed{A=-5}$$

$$2A+B=10 \quad\Rightarrow\quad 2\,(-5)+B=10 \quad\Rightarrow\quad \boxed{B=20}$$

7) Sustituyendo los valores de A y B en (3∗) obtenemos la solución particular:

$$\boxed{y_p = (-5x^2 + 20x)\, e^{-2x}}$$

8) *CONCLUSIÓN*: La solución general será: $y = y_c + y_p$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + (20x - 5x^2)\, e^{-2x}$$

Problema 93 Resolver $y'' + y = 4x \cos x$

Solución:

1) La ecuación característica es: $\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = -1$

$\Rightarrow \quad \lambda = \pm i$

2) Entonces la solución complementaria será: $y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$

3) Como el segundo miembro es: $f(x) = 4x \cos x$ (caso III. 2)

entonces la solución particular será: $y_p = x[(Ax + B)\cos x + (Mx + N)\operatorname{sen} x]$

BÚSQUEDA DE A, B, M, N.

4) Ahora, hallemos y_p'':

De $y_p = (Ax^2 + Bx)\cos x + (Mx^2 + Nx)\operatorname{sen} x$ .... (4∗)

obtenemos:

$$y_p' = (2Ax + B)\cos x + (Ax^2 + Bx)(-\operatorname{sen} x) + (2Mx + N)\operatorname{sen} x + (Mx^2 + Nx)\cos x$$

$$y_p'' = 2A\cos x + (2Ax + B)(-\operatorname{sen} x) + (2Ax + B)(-\operatorname{sen} x) + (Ax^2 + Bx)(-\cos x)$$
$$+ (2M)\operatorname{sen} x + (2Mx + N)\cos x + (2Mx + N)\cos x + (Mx^2 + Nx)(-\operatorname{sen} x)$$

5) Sustituir y_p'' y y_p en la ecuación original $y'' + y = 4x\cos x$, obtenemos:

$$2A\cos x + (2Ax + B)(-\operatorname{sen} x) + (2Ax + B)(-\operatorname{sen} x) + (Ax^2 + Bx)(-\cos x) +$$
$$2M\operatorname{sen} x + (2Mx + N)\cos x + (2Mx + N)\cos x + (Mx^2 + Nx)(-\operatorname{sen} x) +$$
$$(Ax^2 + Bx)\cos x + (Mx^2 + Nx)\operatorname{sen} x = 4x\cos x$$

6) Simplificamos:

$$2A\cos x - 2\,(2Ax + B)\,\text{sen}\,x + 2M\,\text{sen}\,x + 2\,(2Mx + N)\cos x = 4x\cos x$$

$$\Rightarrow \; 2A\cos x - 4Ax\,\text{sen}\,x - 2B\,\text{sen}\,x + 2M\,\text{sen}\,x + 4Mx\cos x + 2N\cos x = 4x\cos x$$

$$\Rightarrow \; (2A + 2N)\cos x + (2M - 2B)\,\text{sen}\,x - 4A\,x\,\text{sen}\,x + 4Mx\cos x = 4x\cos x$$

Igualando coeficientes:

$$4M = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = 1}$$

$$-4A = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 0}$$

$$2M - 2B = 0 \quad \Rightarrow \quad M - B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = M \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 1}$$

$$2A + 2N = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 + 2N = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = 0}$$

7) Sustituir en (4∗) y obtenemos:

$$y_p = (0x^2 + 1.x)\cos x + (1.x^2 + 0.x)\,\text{sen}\,x$$

$$y_p = x\cos x + x^2\,\text{sen}\,x$$

8) Por tanto, la solución general será:

$$y = y_c + y_p$$

$$y = c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x + x\cos x + x^2\,\text{sen}\,x$$

Problema 94 Resolver: $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\,\text{sen}\,2x$

Solución:

1) La ecuación característica es:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \quad , \quad \textit{completar cuadrados:}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 1 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda + 1)^2 = -4$$

$$\Rightarrow \quad \lambda + 1 = \pm 2i \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 + 2i \\ \lambda_2 = -1 - 2i \end{cases}$$

coeficiente en e^{-x}

es el arco $2x$ de $\cos 2x$

2) Entonces, la solución complementaria será: $y_c = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$

3) Ahora, hallemos la solución particular.

Como el 2do miembro es $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} 2x$, entonces la solución particular tendrá la forma: $y_p = x e^{-x}(A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x)$

Por hallarse los valores de A y B

4) Como $y_p = xe^{-x}(A\cos 2x + B \operatorname{sen} 2x)$, obtenemos:

$$y'_p = (xe^{-x})'(A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x) + xe^{-x}(A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x)'$$

$$y'_p = (e^{-x} - xe^{-x})(A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x) + xe^{-x}(-2A\operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x)$$

$$y''_p = (e^{-x} - xe^{-x})'(A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x) + (e^{-x} - xe^{-x})(A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x)'$$
$$+ (xe^{-x})'(-2A\operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x) + xe^{-x}(-2A\operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x)'$$

$$y''_p = [-e^{-x} - (e^{-x} - xe^{-x})](A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x) + (e^{-x} - xe^{-x})$$
$$(-2A\operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x) + (e^{-x} - xe^{-x})(-2A\operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x) +$$
$$xe^{-x}(-4A\cos 2x - 4B\operatorname{sen} 2x)$$

5) Sustituir y_p, y'_p, y''_p en la ecuación original $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\operatorname{sen} 2x$, así obtenemos:

$$[-2e^{-x} + xe^{-x}](A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x) + \underline{(e^{-x} - xe^{-x})(-2A\operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x)}$$
$$\underline{+(e^{-x} - xe^{-x})(-2A\operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x)} + xe^{-x}(-4A\cos 2x - 4B\operatorname{sen} 2x)$$
$$+2(e^{-x} - xe^{-x})(A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x) + 2xe^{-x}(-2A\operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x)$$
$$+5xe^{-x}(A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x) = e^{-x}\operatorname{sen} 2x$$

$$2(e^{-x} - xe^{-x})(-2A\operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x) + (A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x)(2e^{-x} - 2xe^{-x}$$
$$+5xe^{-x}) + [-2e^{-x} + xe^{-x}](A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x) + xe^{-x}(-4A\cos 2x$$
$$-4B\operatorname{sen} 2x) + 2xe^{-x}(-2A\operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x) = e^{-x}\operatorname{sen} 2x$$

Multipliquemos:

$$\Rightarrow -4Ae^{-x}\operatorname{sen}2+4Be^{-x}\cos 2x+2Axe^{-x}\operatorname{sen}2x-2Bxe^{-x}\cos 2x$$
$$+2Ae^{-x}\cos 2x+2Be^{-x}\operatorname{sen}2x-2Axe^{-x}\cos 2x-2Be^{-x}\operatorname{sen}2x$$
$$+5Axe^{-x}\cos 2x+5Bxe^{-x}\operatorname{sen}2x-2Ae^{-x}\cos 2x-2Bxe^{-x}\operatorname{sen}2x$$
$$+Axe^{-x}\cos 2x+Bxe^{-x}\operatorname{sen}2x-4Axe^{-x}\cos 2x-4Bxe^{-x}\operatorname{sen}2x$$
$$-4Axe^{-x}\operatorname{sen}2x+4Bxe^{-x}\cos 2x=e^{-x}\operatorname{sen}2x$$

$$\Rightarrow \underline{-4Ae^{-x}\operatorname{sen}2x}+4Be^{-x}\cos 2x-2Axe^{-x}\operatorname{sen}2x+2Bxe^{-x}\cos 2x=\underline{e^{-x}}\operatorname{sen}2x$$

6) Simplificar la exponencial e^{-x} en ambos miembros:

$$-4A\operatorname{sen}2x+AB\cos 2x \qquad = \operatorname{sen}2x$$

7) Igualando los coeficientes: $-4A=1 \Rightarrow A=-1/4$

$4B=0 \Rightarrow B=0$

8) Sustituir (7) en (4):

$$y_p=xe^{-x}\left(-\tfrac{1}{4}\cos 2x+0.\operatorname{sen}2x\right)$$
$$y_p=-\tfrac{1}{4}xe^{-x}\cos 2x$$

9) Por tanto, la solución general será:

$$y=y_c+y_p$$
$$y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\operatorname{sen}2x)-\tfrac{1}{4}xe^{-x}\cos 2x$$

En los siguientes problemas se pide hallar las soluciones particulares de las ecuaciones que cumplen las condiciones iniciales dadas.

Problema 95 Resolver: $y''-5y'+6y=(12x-7)e^{-x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

Solución:

1) La ecuación característica es: $\lambda^2-5\lambda+6=0$

$(\lambda-3)(\lambda-2)=0$ → $\lambda=2$, $\lambda=3$

2) Luego, la solución complementaria será: $y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

3) Ahora, hallemos la solución particular. Como el 2do miembro es la forma $f(x) = (12x-7)\, e^{-x}$, entonces la solución particular será de la forma: $y_p = (Ax+B)\, e^{-x}$.

POR HALLARSE A Y B

Veamos:

4) Como $y_p = (Ax+B)\, e^{-x}$

$$\Rightarrow \quad y'_p = A e^{-x} + (Ax+B)\, e^{-x}(-1)$$

$$= A e^{-x} - (Ax+B)\, e^{-x}$$

$$y''_p = -Ae^{-x} - [Ae^{-x} + (Ax+B)e^{-x}(-1)]$$

$$= -A e^{-x} - A e^{-x} + (Ax+B)\, e^{-x}$$

5) Sustituir y_p , y'_p , y''_p en la ecuación: $y''_p - 5y'_p + 6y_p = (12x-7)\, e^{-x}$

$$-Ae^{-x} - Ae^{-x} + (Ax+B)e^{-x} - 5Ae^{-x} + 5(Ax+B)e^{-x} + 6(Ax+B)e^{-x} = (12x-7)e^{-x}$$

6) Simplificando en ambos miembros el término e^{-x} :

$$-A - A + (Ax+B) - 5A + 5\,(Ax+B) + 6\,(Ax+B) = 12x-7$$

$$-7A + 12\,(Ax+B) = 12x-7$$

$$\Rightarrow \quad 12Ax + (12B - 7A) = 12x - 7$$

7) Igualando coeficientes:

$$12A = 12 \Rightarrow \quad \boxed{A=1}$$

$$12B - 7A = -7 \Rightarrow 12B -- 7 = -7 \Rightarrow 12B = 0 \Rightarrow \boxed{B=0}$$

8) Sustituyendo en (3) obtenemos: $y_p = (x+0)\, e^{-x}$

$$\Rightarrow \quad y_p = x\, e^{-x}$$

9) Por tanto la solución general será:

$$y = y_c + y_p$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + x e^{-x}$$

10) Ahora, hallemos las constantes c_1 y c_2, teniendo en cuenta las condiciones iniciales: $y(0) = y'(0) = 0$

Veamos:

De $\begin{cases} y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + x e^{-x} \\ y' = 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x} + e^{-x} - x e^{-x} \end{cases}$ obtengo $\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 & \text{, pues } y(0) = 0 \\ 0 = 2c_1 + 3c_2 + 1 & \text{, pues } y'(0) = 0 \end{cases}$

Al Resolver el sistema $\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 0 = 2c_1 + 3c_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = -2c_1 - 2c_2 \\ 0 = 2c_1 + 3c_2 + 1 \end{cases}$

$$0 = 0 + c_2 + 1 \Rightarrow \boxed{c_2 = -1}$$

Como $0 = c_1 + c_2 \Rightarrow 0 = c_1 - 1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 1}$

11) Conclusión: La solución general será $\boxed{y = e^{2x} - e^{3x} + x e^{-x}}$



CAPÍTULO 4

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

4.0 INTRODUCCIÓN

En este capítulo vamos a tratar las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a la economía y a la ingeniería.

4.1 APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES A LA ECONOMÍA.

4.1.1 Funciones: Utilidad, Costo, Consumo, Demanda y Oferta

Problema 96

El cambio en las utilidades netas P a medida que cambia el gasto en propaganda "x", está dado por:

$$\frac{dp}{dx} = k - a(p+x)$$

donde a y k son constantes. Hallar P como función de x, si $P = P_0$ cuando $x = 0$.

Solución:

1) La ecuación diferencial dada se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{dP}{dx} = k - ap - ax$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{dp}{dx} + a\,p = k - a\,x}$$

que es lineal, donde p es función de x, esto es, $p = \phi(x)$. Debo hallar $p(x)$.

2) La solución será:

$$P = e^{-\int a dx}\left[\int (k-ax)e^{\int a dx}dx + C\right]$$

$$\Rightarrow \quad P = e^{-ax}\left[\int (k-ax)e^{ax}dx + C\right]$$

$$= e^{-ax}\left[\int k e^{ax} dx - a \int x e^{ax} dx + C \right]$$

$$= e^{-ax}\left[\frac{k}{a} e^{ax} - \frac{1}{a} e^{ax}(ax-1) + C \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2a)$$

INTEGRANDO I POR PARTES:

$$u = x \qquad dv = e^{ax}\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{a} e^{ax} \qquad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{a} x e^{ax} - \frac{1}{a} \int e^{ax} dx$$

$$= \frac{1}{a} x e^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax}$$

$$= \frac{1}{a^2} e^{ax}(ax-1)$$

De $(2a)$:

$$\Rightarrow \quad P = \frac{1}{a} e^{ax} e^{-ax}[k - (ax-1) + Cae^{-ax}]$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{1}{a}[k - (ax-1) + C a e^{-ax}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2*)$$

3) Sí $P = P_0$, cuando $x = 0$, obtenemos de (2∗):

$$\Rightarrow \quad P_0 = \frac{1}{a}[k + 1 + Ca]$$

$$\Rightarrow \quad a P_0 = k + 1 + C a \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = P_0 - \frac{k+1}{a}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3*)$$

4) Sustituir (3∗) en (2∗):

$$\Rightarrow \quad P = \frac{1}{a}\left[k - (ax-1) + a\left(P_0 - \frac{k+1}{a}\right) e^{-ax}\right]$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{k}{a} - x + \frac{1}{a} + \left(P_0 - \frac{k+1}{a}\right) e^{-ax}$$

$$\Rightarrow \quad P = \left(P_0 - \frac{k+1}{a}\right) e^{-ax} - x + \frac{k+1}{a}$$

Problema 97 El cambio en el costo de ordenar y sostener C, a medida que cambia la cantidad x, está dado por $\frac{dC}{dx} = a - \frac{C}{x}$ donde "a" es una constante. Hallar C como función de x, si $C = C_0$ cuando $x = x_0$.

Solución:

1) La ecuación diferencial: $\frac{dC}{dx} = a - \frac{C}{x}$

se puede escribir como: $\frac{dC}{dx} - \frac{1}{x}C = a \left.\vphantom{\frac{1}{x}}\right\} \begin{matrix} P(x) = -\frac{1}{x} \\ Q(x) = a \end{matrix}$

$$\Rightarrow \quad C' - \frac{1}{x}C = a \quad , \quad C' = \frac{dC}{dx}$$

que es una ecuación diferencial lineal, cuya solución será:

$$C = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int p(x)\,dx} + k\right] \quad \text{.................................} \quad (1*)$$

2) Donde:

i) $\int p(x)\,dx = \int\left(-\frac{1}{x}dx\right) = -Ln\,x$

ii) $e^{-\int P(x)\,dx} = e^{-(-Lnx)} = e^{Lnx} = x$

iii) $e^{\int p(x)\,dx} = e^{-Ln\,x} = e^{Ln\,x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

3) Sustituir (2) en (1*): $C = x\left[\int a\left(\frac{1}{x}\right)dx + k\right]$

$$C = x\,[\,a\,\text{Ln}\,x + k\,]$$

4) Como $C = C_0$ cuando $x = x_0$, sustituir en (3): $C_0 = x_0\,[\,a\,Ln\,x_0 + k\,]$

Despejar k : $a\,Ln\,x_0 + k = \frac{C_0}{x_0}$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{C_0}{x_0} - a\,Ln\,x_0 \quad \text{.........} \; (4*)$$

5) sustituir (4*) en (3): $C = x\left[a\,Ln\,x + \frac{C_0}{x_0} - a\,Ln\,x_0\right]$

$$C = x\left[\,a\,Ln\left(\frac{x}{x_0}\right) + \frac{C_0}{x_0}\right]$$

Problema 99 El cambio en el consumo C de una mercancía particular, a medida que cambia la venta I está dado por: $\frac{dC}{dI} = C + k\,e^{I}$ donde k es una constante. Hallar C como función de I, si $C = C_0$ cuando $I = 0$.

Solución:

1) La ecuación dada, se puede escribir de la forma:

$$\frac{dC}{dI} - C = k\,e^{I} \iff C' - CP(I) = Q(I)$$

donde: $P(I) = -1$, $Q(I) = K\,e^{I}$

2) Como es una ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL, su solución es:

$$C = e^{-\int P(I)\,dI}\left[\int Q(I)\,e^{\int P(I)\,dI}\,dI + M\right]$$

3) Donde: *i)* $\int P(I)\,dI = \int (-1)\,dI = -I$

ii) $e^{-\int P(I)\,dI} = e^{I}$

iii) $e^{\int P(I)\,dI} = e^{-I}$

4) Sustituir (3) en (2): $C = e^{I}\left[\int k\,e^{I} e^{-I}\,dI + M\right]$, M = constante

$$C = e^{I}\left[\int k\,dI + M\right]$$

$$C = e^{I}[K\,I + M] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(4*)}$$

5) Si $C = C_0$, cuando $I = 0$, obtenemos:

$$C_0 = e^{0}[0 + M] \Rightarrow \boxed{M = C_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(5*)}$$

6) Sustituir (5*) en (4*): $\boxed{C = e^{I}[K\,I + C_0]}$

4.1.2 Oferta y Demanda

PRINCIPIO ECONÓMICO DE LA OFERTA Y LA DEMANDA.

FUNCIÓN DEMANDA. Sea p el precio, por quintal, de un bien (por ejemplo arroz) en cualquier tiempo t. Entonces p es función de t, es decir $p(t)$.

Se llama *DEMANDA* (D) al número de unidades del bien que desean los consumidores por unidad de tiempo en cualquier tiempo t.

Esta demanda puede depender de $p(t)$ y de la tasa de cambio $p'(t)$ en cualquier tiempo t; que en símbolos matemáticos se escribe así:

$$D = f(\,p\,(t)\;,p'(t)\,)$$

↑ *Función demanda*

FUNCIÓN OFERTA. Se llama oferta (S) al número de unidades de un bien que los productores tienen disponible por unidad de tiempo en cualquier tiempo.

La oferta, también, depende de $p(t)$ y de $p'(t)$, que se denota por:

$$S = g\,(\,p(t)\;,p'(t)\,)$$

PRINCIPIO ECONOMICO DE LA OFERTA Y DE LA DEMANDA: EL precio $p(t)$ de un bien en cualquier tiempo, está determinado por la condición de que la demanda en t sea igual a la oferta en t, es decir:

$$D = S$$

$$f(\,p(t)\;,p'(t)) = g\,(\,p(t)\;,p'(t)\,)$$

↑ *es una ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN.*

Supongamos que $\begin{cases} D = a_1\,p(t) + a_2\,p'(t) + a_3 \\ S = b_1\,p(t) + b_2\,p'(t) + b_3 \end{cases}$ donde: $D = S$

$\Rightarrow \quad (a_2 - b_2)\,p'(t) + (a_1 - b_1)\,p(t) + (a_3 - b_3) = 0$

$\Rightarrow \quad p'(t) + \underbrace{\left(\dfrac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2}\right)}_{k} p(t) = \underbrace{\dfrac{b_3 - a_3}{a_2 - b_2}}_{\ell} \quad , \quad a_2 \neq b_2$

$\Rightarrow \quad p' + k\,p = \ell$

Cuya solución es:

$$p = e^{-\int k\,dt}\left[\int \ell e^{\int k\,dt}dt + c\right]$$

$$p = e^{-kt}\left[\int \ell e^{kt} + c\right]$$

$$p = e^{-kt}\left[\frac{\ell}{k}e^{kt} + c\right]$$

$$P = \frac{\ell}{k} + ce^{-kt} \qquad \text{.............................} (1)$$

si $p = p_0$ en $t = 0 \Rightarrow p_0 = \frac{\ell}{k} + c \Rightarrow \boxed{c = P_0 - \frac{\ell}{k}}$ .... (2)

(2) en (1): $\boxed{p(t) = \frac{\ell}{k} + \left(p_0 - \frac{\ell}{k}\right)e^{-kt}}$

→ Si $p_0 - \frac{\ell}{k} = 0$, los precios permanecen constantes en todo tiempo, es decir: $p(t) = \frac{\ell}{k} = p_0$, $\forall t > 0$

→ Si $k > 0$ y $t \to +\infty$, entonces $p(t) = \frac{\ell}{k}$. En este caso el precio es estable y el limite $p(t) = \frac{\ell}{k}$ se llama precio de equilibrio.

→ Si $k < 0$, entonces $p(t)$ crece indefinidamente a medida que t crece.
En este caso tenemos inflación continuada o inestabilidad de precio.

Problema 100 La oferta y la demanda de un cierto bien están dadas en miles de unidades, respectivamente, por $D = 120 + p(t) - 5p'(t)$, $S = 60 - 2p(t) - 3p'(t)$. En $t = 0$ el precio del bien es 5 unidades.

a) Encontrar el precio en cualquier tiempo posterior y obtenga su gráfico.

b) Determine si hay estabilidad de precio y el precio de equilibrio, si existe.

Solución:

1) Por el principio económico de la oferta y de la demanda: $D = S$

$$120 + P(t) - 5\,p'(t) = 60 - 2p(t) - 3\,p'(t)$$

$$0 = 2p' - 3p - 60 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{p' - \frac{3}{2}p = 30}$$

La solución es:

$$p = e^{-\int\left(-\frac{3}{2}\right)dt}\left[\int 30\, e^{\int\left(-\frac{3}{2}\right)dt}dt + c\right]$$

$$p = e^{\frac{3}{2}t}\left[\int 30\, e^{-\frac{3}{2}t}dt + c\right]$$

$$P = e^{\frac{3}{2}t}\left[\frac{30}{-3/2}e^{-\frac{3}{2}t} + c\right]$$

$$P = e^{\frac{3}{2}t}[-20e^{-\frac{3}{2}t} + c]$$

$p = -20 + c\,e^{3/2\,t}$, si $p = 5$, $t = 0$

$\Rightarrow 5 = -20 + c \Rightarrow \quad c = 25$

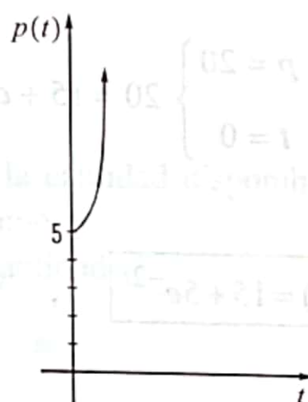
Luego:

a) $\boxed{p = -20 + 25e^{\frac{3}{2}t}}$, $\forall\, t > 0$

b) ANÁLISIS:

En la exponencial $e^{\frac{3}{2}t}$ se tiene que $\frac{3}{2} > 0$, luego p crece indefinida-mente a medida que t crece. Tendremos inflación, no hay estabilidad de precio, no hay precio de equilibrio.

Gráfico: $p(t)$



Problema 101

La oferta y la demanda de un bien están dadas en miles de unidades, respectivamente por $D = 40 + 3P(t) + P'(t)$, $S = 160 - 5P(t) - 3P'(t)$. En $t = 0$ el precio del bien es 20 unidades.

a) Encuentre el precio en cualquier tiempo posterior y obtenga su gráfico.

b) Determine si hay estabilidad de precio y el precio de equilibrio si existe.

Solución:

1) Debe cumplirse: $\quad D = S$

$\Rightarrow \quad 40 + 3P + P' = 160 - 5P - 3P'$

$\Rightarrow \quad 4P' + 8P - 120 = 0$

$\Rightarrow \quad P' + 2P = 30$

2) La solución es:

$$P = e^{-\int 2\,dt}\left[\int 30\,e^{\int 2\,dt}\,dt + c\right]$$

$$p = e^{-2t}\left[\int 30\,e^{2t}\,dt + c\right]$$

$$p = e^{-2t}\,[15e^{2t} + c]$$

$$p = 15 + c\,e^{-2t}$$

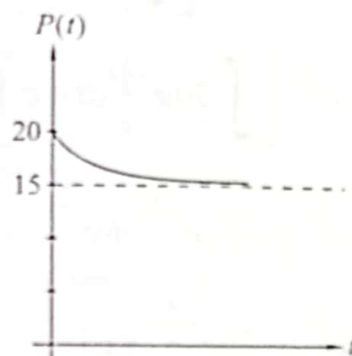
$$si\quad \left.\begin{array}{l} p = 20 \\ t = 0 \end{array}\right\}\ 20 = 15 + c \ \Rightarrow\ c = 5$$

Luego:

$$\boxed{P(t) = 15 + 5e^{-2t}} \quad , \quad \forall\, t \geq 0$$

a) El precio en cualquier tiempo posterior es: $P(t) = 15 + 5e^{-2t}$

Su gráfico es:



b) ***Análisis:***
Cuando el tiempo es prolongado el precio tiende a estabilizarse acercándose al precio $P^* = 15$, esto es $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = 15$.

Pues e^{-2t} se acerca a cero, cuando $t \to +\infty$.

Problema 102

Al igual del problema anterior, resolver, si $D = 40 + P'(t)$, $S = 160 - 3P'(t)$.

Solución:

1) $D = S$

$$\Rightarrow \quad 40 + P' = 160 - 3\,P'$$

$$\Rightarrow \quad 4P' = 120$$

$$\Rightarrow \quad P' = 30$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dP}{dt} = 30$$

$$\Rightarrow \quad dP = 30dt$$

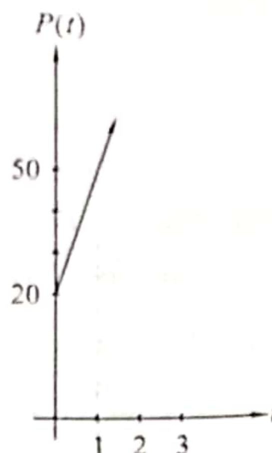
$$\Rightarrow \quad \int dP = \int 30\,dt + c$$

$$\Rightarrow \quad P = 20t + c$$

si $P = 20$, $t = 0 \ \Rightarrow\ 20 = 0 + c$
$\Rightarrow\ c = 20$

a) Luego $P(t) = 30\,t + 20$, $\forall\, t > 0$

b) No hay estabilidad de precio ni precio de equilibrio.



4.1.3 Inventarios (Excedente de la Oferta)

En el análisis anterior hemos visto el caso donde la oferta y la demanda son iguales ($S = D$) para luego hallar el precio. Pero en una situación dinámica, la oferta y la demanda no son iguales ($S > D$), entonces los productores tienen en su posesión una cierta cantidad ($S - D > 0$) la cual se llama **INVENTARIO** del bien (stock $= S - D$) el cual esperan vender al mercado. Por otro lado, si la demanda es mayor que la oferta, entonces los productores deben tomar del inventario la cantidad de bienes que ofrezcan a los consumidores.

FORMULACIÓN MATEMÁTICA. Los cambios que sufre la **CANTIDAD OFRECIDA** por los productores (**OFERTA**) se suceden en un **DIFERENCIAL DE TIEMPO**.

Así tendremos:

1. De "t" a "$t + \Delta t$" la cantidad acumulada (stock) es:
   $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$ donde $q(t + \Delta t) = q(t) + \Delta q$ es la cantidad disponible en el tiempo "$t + \Delta t$", donde: Δt es el incremento del tiempo, y
   Δq es el incremento de la cantidad.

2. Si en 1 hora se produce $S = 50$ unidades de un bien.
   en 2 horas " " $2S = 2(50) = 100$ unidades de dicho bien.
   en Δt " " $\Delta t \,.\, S$

3. Si en 1 hora se consume $D = 50$ unidades del mismo bien
   en 2 horas " " $2D = 100$
   en Δt " " " $\Delta t \,.\, D$

4. Luego, de "t" a "$t + \Delta t$" el inventario (stock) será:
   $\Delta q = \Delta t \cdot S - \Delta t \cdot D +$ otros términos que contienen $(\Delta t)^2$, $(\Delta t)^3$, etc.
   $\Rightarrow \frac{\Delta q}{\Delta t} = S - D +$ otros términos que contienen (Δt), $(\Delta t)^2$, etc.
   $\Rightarrow \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} (S - D +$ términos en Δt, $(\Delta t)^2$, ...$)$

5. $\Rightarrow$ $$\boxed{\frac{dq}{dt} = S - D} \quad \text{(5*)}$$
   Si q es constante $\Rightarrow \frac{dq}{dt} = 0$ y $S - D = 0 \iff S = D$

6. Si un productor desea proteger sus utilidades, entonces la tasa del incremento del precio será proporcional a la tasa descendente del inventario, es decir:

$$\frac{dP}{dt} = -\alpha \cdot \frac{dq}{dt} \quad \text{(6*)}$$

7. Al reemplazar (5*) en (6*):

$$\frac{dP}{dt} = -\alpha\,(S - D) \quad \text{(7*)}$$

es la ecuación diferencial para p donde $\begin{cases} \alpha \text{ es positiva y conocido} \\ S \text{ y } D \text{ están expresados} \\ \text{en términos de } P \end{cases}$

Problema 103 Para proteger sus ganancias, un productor decide que la tasa a la cual incrementará los precios debería ser numéricamente igual a tres veces la tasa a la cual decrece su inventario. Asumiendo que la oferta y la demanda están dadas en términos del precio P por $S = 80 + 3P$, $D = 150 - 2P$ y que $P = 20$ en $t = 0$, encuentre el precio en cualquier tiempo.

Solución:

1) La proporcionalidad, según el problema es:

$\frac{dp}{dt} = 3\frac{dq}{dt}$ .... según (6*)

2) Pero:

$$\frac{dq}{dt} = S - D$$
$$= 80 + 3p - (150 - 2p)$$
$$= 5p - 70$$

3) (2) en (1):

$$\frac{dP}{dt} = -3\,(5p - 70)$$
$$= -15p + 210$$

$$\Rightarrow \quad P' + 15P = 210$$

4) La solución es:

$$p = e^{-\int 15\,dt}\left[\int 210\,e^{\int 15\,dt}dt + c\right]$$

$$= e^{-15t}\left[\int 210 e^{15t} dt + c\right]$$

$$p = e^{-15t}\left[\frac{210}{15}e^{15t} + c\right]$$

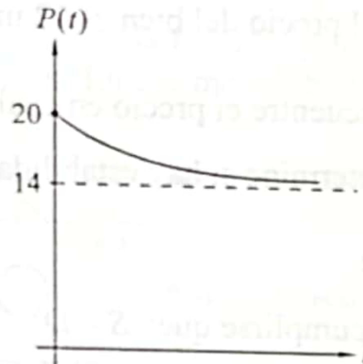
$\Rightarrow \quad P = 14 + c.e^{-15t}$,

para $P = 20$, $t = 0$

$\Rightarrow \quad 20 = 14 + c \quad \Rightarrow \quad c = 6$

Luego: $\boxed{P = 14 + 6\,e^{-15t}}$, $\forall t > 0$

y $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = 14$



Problema 104 Sí se tiene $\frac{dP}{dt} = -5\frac{dq}{dt}$, $\frac{dq}{dt} = S - D$

donde $\begin{cases} S = 50 + 3p \\ D = 90 - 5P \end{cases}$

Entonces: $\frac{dP}{dt} = -5\,(S - D)$

$$= -5\,(50 + 3P - 90 + 5P)$$

$$= -40\,P + 200$$

$$P' + 40P = 200$$

$\Rightarrow \quad p = e^{-\int 40\,dt}\left[\int 200\,e^{\int 40 dt}dt + c\right]$

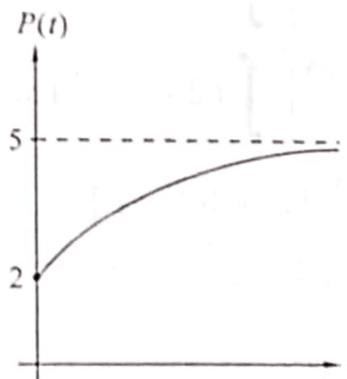
$$p = e^{-40t}\left[\int 200\,e^{40t}dt + c\right]$$

$$p = e^{-40t}\,[5e^{40t} + c]$$

$\Rightarrow \quad p = 5 + c\,e^{-40t}$ si $\begin{cases} p = 2 \\ t = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad 2 = 5 + c \Rightarrow \boxed{c = -3}$

Luego: $\boxed{p = 5 - 3e^{-40t}}$ $t \geq 0$



En el gráfico se observa que el precio se incrementa de 2 al precio de equilibrio 5. Este precio de equilibrio, también, se obtiene al igualar: $S = D$

$$50 + 3P = 90 - 5P$$

$$8P = 40 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 5}$$

Problema 105 La oferta y la demanda de un bien están dadas en miles de unidades por:

$S = 24(2 - e^{-2t}) + 16P(t) + 10P'(t)$, $D = 240 - 8P(t) - 2P'(t)$, respectivamente. En $t = 0$ el precio del bien es 12 unidades.

a) Encuentre el precio en cualquier tiempo posterior y obtenga su gráfico.

b) Determine si hay estabilidad de precio y el precio de equilibrio si existe alguno.

Solución:

1) Debe cumplirse que: $S = D$

$$24(2 - e^{-2t}) + 16P + 10P' = 240 - 8P - 2P'$$

$$12P' + 24P = 24e^{-2t} + 192$$

$$p' + 2P = 2e^{-2t} + 16$$

2) La solución es:

$$P = e^{-\int 2\,dt}\left[\int (2e^{-2t} + 16)\, e^{\int 2\,dt} dt + c\right]$$

$$= e^{-2t}\left[\int (2e^{-2t} + 16)\, e^{2t} dt + c\right]$$

$$= e^{-2t}\left[\int (2 + 16e^{2t})\, dt + c\right]$$

$$= e^{-2t}\left[2t + 8e^{2t} + c\right]$$

$$P = 2te^{-2t} + 8 + ce^{-2t}$$

a) Si $P = 12$, $t = 0$; entonces:

$$12 = 0 + 8 + c \Rightarrow \boxed{c = 4}$$

Luego: $\boxed{P = 2te^{-2t} + 4e^{-2t} + 8}$

b) si $t \longrightarrow +\infty$, entonces:

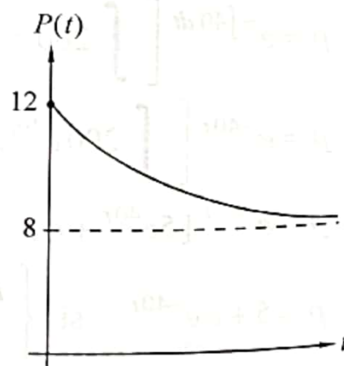
$$P = \lim_{t \to +\infty}\left[\frac{2t}{e^{2t}} + 4e^{-2t} + 8\right]$$

← *Aplicar L'Hopital*

$$= \lim_{t \to +\infty}\left[\frac{2}{e^{2t}} + 4e^{-2t} + 8\right]$$

$$= 0 + 0 + 8$$

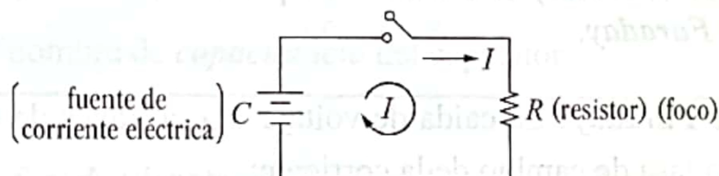
$\boxed{P = 8}$ es el precio de equilibrio. Hay estabilidad de precio.



El precio ha descendido de 12 al precio de equilibrio 8.

4.2 APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES A LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Introducción: Cualquier persona que llega a su casa, por la noche, apriete el interruptor y prende el foco de la habitación. En ese momento se ha cerrado el circuito siguiente:



Como notamos las dos medidas básicas de flujo de energía eléctrica en un circuito son *la corriente* y *el voltaje*.

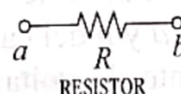
Elementos de un circuito:

Para construir un circuito simple, se usan tres elementos básicos: resistor, inductor y capacitor, los cuales se describen a continuación:

Resistor

Cuando la corriente fluye por un segmento de circuito donde hay ***un resistor***, se pierde mucha energía.

La caída de voltaje a través de un RESISTOR y la corriente que fluye por él son modelados por la ***ley de Ohm***.



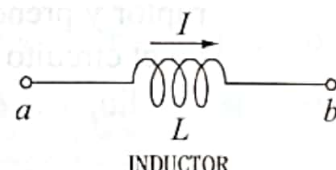
Ley de Ohm: La caída de voltaje V_{ab} entre los extremos a y b de un resistor es proporcional a la corriente I que fluye por el resistor:

$$\boxed{V_{ab} = RI}$$, la constante R se conoce como ***resistencia*** del resistor.

Inductor

Una corriente eléctrica cambiante $I(t)$ que pasa por un circuito crea un campo magnético cambiante que induce una caída de voltaje entre los extremos del segmento ab.

La caída de voltaje V_{ab} a través de un inductor (bobinas) está modelado por la ***ley de Faraday***.



Ley de Faraday: La caída de voltaje V_{ab} a través de un inductor es proporcional a la tasa de cambio de la corriente:

$$\boxed{V_{ab} = L\frac{dI}{dt}}$$

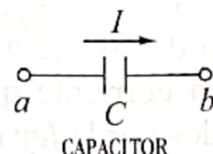
La constante L se denomina la ***inductancia*** del inductor.

La Ley de Faraday expresa que la caída de potencial no depende directamente de la corriente I, sino de su tasa de cambio, $\frac{dI}{dt}$.

La inductancia se mide en ***henrios*** (denotada por H) si el voltaje se mide en volts y $\frac{dI}{dt}$ en amperes por segundo.

Capacitor

Un ***capacitor*** consta de dos placas separadas por un aislante como el aire. Si las terminales a y b del capacitor se conectan a una fuente de voltaje, se empezarán a acumular cargas de signo opuesto en las placas.



Se habla de la carga total $q(t)$ en el capacitor y obsérvese que si $q(t_0)$ es la carga inicial, entonces:

$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} I(s)\,ds \quad \text{, para} \quad t \geq t_0$$

Un capacitor es como un depósito utilizado para almacenar agua y proveer una fuerte presión.

Ley de Coulomb: La caída de voltaje V_{ab} cuando la corriente fluye de "a" a "b" a través de un capacitor es proporcional a la carga en el capacitor:

$$V_{ab} = \frac{1}{C}q(t)$$

$$= \frac{1}{C}\left\{ q(t_0) + \int_{t_0}^{t} I(s)\,ds \right\}$$

- Cuando $I(s) = 0$, se tiene: $V_{ab} = \frac{q}{C}$
- Cuando $q(t_0) = 0$, se tiene $V_{ab} = \frac{1}{C}\int I \cdot dt$

La constante C recibe el nombre de ***capacitancia*** del capacitor.

La capacitancia se mide en ***farads*** (denotado por F) si la carga "q" está dado en coulombs, el voltaje en volts y la corriente en amperes.

Ley de Kirchhoff

Los circuitos constan de uno o más ciclos cerrados, cada uno con resistores, inductores, capacitores o fuentes de voltaje. A fin de modelar la corriente que pasa por un circuito se necesita una fórmula que relaciona la caída de voltaje a través de varios componentes de un circuito. Se ha observado que se cumple la siguiente ley de conservación para cada ciclo cerrado de un circuito.

Ley de Kirchhoff para el voltaje

Elija los puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en el circuito y supóngase que la corriente fluye de a_1 a a_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, n$ $(a_{n+1} = a_1)$.

Entonces: $$V_{a_1a_2} + V_{a_2a_3} + \ldots + V_{a_na_1} = 0$$

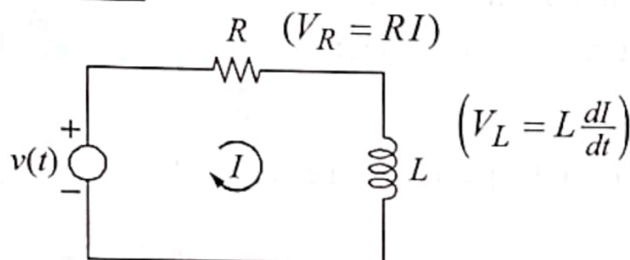
donde $V_{a_ia_{i+1}} = V_{a_i} - V_{a_{i+1}}$ es la caída de voltaje entre los puntos a_i y a_{i+1}.

Ejemplo 1:

(Circuito RL) (Un circuito eléctrico LR consta de una inductancia de L henrios en serie con una resistencia de R ohmios, con una fuerza electromotriz $v(t)$).

Para un circuito, que consta de una inductancia L henrios en serie con una resistencia de R ohmios, circula una corriente I_0 en el instante t_0. Exprese I en función de t (supóngase que no existe fuerza electromotriz)

Solución:



Por la ley de Kirchhoff se tiene:

$E(t) = V_R + V_L$ .... (1)

Pero: $\begin{cases} V_R = RI \text{ , } R \text{ es constante} \\ V_L = L\frac{dI}{dt} \end{cases}$

a) Si $E(t) = 0$

- Al sustituir en (1) obtendremos la siguiente ecuación diferencial: $RI + L\frac{dI}{dt} = 0$

  Que al ordenar tenemos: $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0$

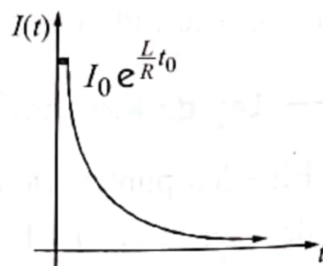
  Al resolver: $I(t) = ke^{-\frac{R}{L}t}$ .... (2)

  Imponiendo la condición inicial

  $I(t_0) = I_0 \Rightarrow$ $I_0 = ke^{-\frac{R}{L}t_0}$

  Despejar k : $k = I_0 e^{\frac{R}{L}t_0}$ .... (3)

- Sustituir (3) en (2): $I(t) = I_0 e^{\frac{R}{L}t_0} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$



- Conclusión $\boxed{I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}}$

b) Si $E(t) = E_0$ es una constante, la ecuación dado en (1) se convierte en la ecuación diferencial: $L\frac{dI}{dt} + RI = E_0$

$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E_0}{L}$ .... (2)

La solución general de (2) es: $I(t) = I_C + I_P$

I_C : solución complementaria.

I_P : solución particular.

SOLUCIÓN COMPLEMENTARIA

$I_C = ke^{-\frac{R}{L}t}$

SOLUCIÓN PARTICULAR

Suponer que $I_P = M$ (constante)

Entonces $\frac{dI_P}{dt} = 0$

Al sustituir en (*): $0 + \frac{R}{L}M = \frac{E_0}{L} \rightarrow M = \frac{E_0}{R}$

Luego: $I(t) = ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R}$

c) Cuando la fuerza electromotriz es periódica, esto es cuando $E(t) = E_0 \operatorname{sen}(wt)$.

- En este caso la ecuación diferencial es planteada de la siguiente forma:

$L\frac{dI}{dt} + RI = E_0 \operatorname{sen}(wt)$ .... (1)

- El factor integrante en este caso es: $e^{\int \frac{R}{L}dt} = e^{\frac{R}{L}t}$ .... (2)

- Multiplicar en (1) por el factor integrante:

$$\underbrace{Le^{\frac{R}{L}t} \cdot dI + R \cdot I \cdot e^{\frac{R}{L}t} \cdot dt}_{} = E_0 e^{\frac{R}{L}t} \operatorname{sen}(wt) \cdot dt$$

$$d[LIe^{\frac{R}{L}t}] = E_0 e^{\frac{R}{L}t} \cdot \operatorname{sen}(wt) \cdot dt$$

- Integrar ambos miembros: $LIe^{\frac{R}{L}t} = E_0 \int e^{\frac{R}{L}t} \cdot \operatorname{sen}(wt)dt + C$ .... (1)

Integrar $J = \int e^{\frac{R}{L}t} \cdot \operatorname{sen}(wt)dt$ por partes

$u = \operatorname{sen}(wt)$ $\quad dv = e^{\frac{R}{L}t} \cdot dt$

$du = w\cos(wt)dt$ $\quad v = \frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}$

$$J = \frac{L}{R}\operatorname{sen}(wt) \cdot e^{\frac{R}{L}t} - \frac{L}{R}w\int \cos(wt) \cdot e^{\frac{R}{L}t} \cdot dt$$

$u = \cos(wt)$ $\quad dv = e^{\frac{R}{L}t} \cdot dt$

$du = -w\cos(wt)dt$ $\quad v = \frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}$

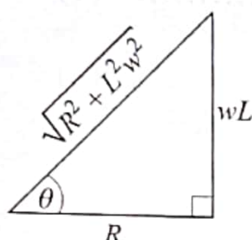
$$J = \frac{L}{R}\operatorname{sen}(wt) \cdot e^{\frac{R}{L}t} - \frac{L}{R}w\left\{\frac{L}{R}\cos(wt)e^{\frac{R}{L}t} + w\frac{L}{R}\underbrace{\int \operatorname{sen}(wt)e^{\frac{R}{L}t}dt}_{J}\right\}$$

$$J = \frac{L}{R}\operatorname{sen}(wt) \cdot e^{\frac{R}{L}t} - \frac{L^2}{R^2}w\cos(wt)e^{\frac{R}{L}t} - \frac{L^2}{R^2}w^2 J$$

$$\left(1 + \frac{L^2}{R^2}w^2\right)J = \frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\left\{\operatorname{sen}(wt) - \frac{L}{R}w \cdot \cos(wt)\right\}$$

$$J = \frac{L}{R^2 + L^2w^2} \cdot e^{\frac{R}{L}t}\{R\operatorname{sen}(wt) - L \cdot w \cdot \cos(wt)\} \text{ ....(2)}$$

(2) en (1): $LIe^{\frac{R}{L}t} = E_0 \cdot \frac{L}{R^2 + L^2w^2} e^{\frac{R}{L}t}\{\ldots\} + C$



$$I(t) = \frac{E_0}{R^2 + L^2w^2}\{R\text{sen}(wt) - L \cdot w \cdot \cos(wt)\} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2w^2}}\left\{\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2w^2}}\text{sen}(wt) - \frac{Lw}{\sqrt{R^2 + L^2w^2}}\cos(wt)\right\} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2w^2}} \cdot \text{sen}(wt - \theta) + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

d) Cuando $v(t) = ve^{-\frac{R}{L}t}$

Resolver: $L\frac{dI}{dt} + RI = ve^{-\frac{R}{L}t}$

Solución:

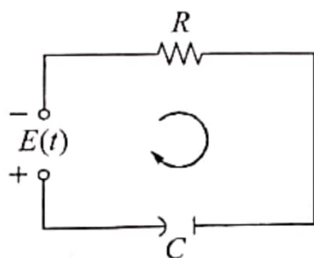
Proceda de manera similar a la parte c) y la solución es $I(t) = \frac{v}{L}te^{-\frac{R}{L}t}$, $t \geq 0$ cuando $I(0) = 0$.

e) $v(t) = kt$, la solución es: $I(t) = \frac{k}{R^2}(Rt + Le^{-\frac{R}{L}t})$

Ejemplo 2: (Circuito *RC*)

Un circuito *RC* consta de un condensador de capacidad *C* faradios en serie con una resistencia de *R* ohmios, teniendo una carga q_0 en el instante t_0. Determinar *q* en función de *t*.

Solución:



- Por la ley de Kirchhoff

$$E(t) = V_R + V_C \text{, donde } \begin{cases} \bullet\ V_R = RI \\ \bullet\ V_C = \frac{1}{C}\int I \cdot dt \end{cases}$$

Así, obtenemos la ecuación: $E(t) = RI + \frac{1}{C}\int I \cdot dt$

Al derivar respecto a t, obtenemos la ecuación diferencial:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \cdot I} \Leftarrow \text{es una ecuación diferencial}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC} I = \frac{1}{R}\frac{dE}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

El factor integrante en (1) es: $e^{\int \frac{1}{RC} dt} = e^{\frac{1}{RC}t}$

Al multiplicar en (1), obtenemos:

$$e^{\frac{1}{RC}t} \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC} e^{\frac{1}{RC}t} \cdot I = \frac{1}{R} e^{\frac{1}{RC}t} \cdot \frac{dE}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[I \cdot e^{\frac{1}{RC}t}] = \frac{1}{R} e^{\frac{1}{RC}t} \cdot \frac{dE}{dt}$$

Integrar:
$$I \cdot e^{\frac{1}{RC}t} = \frac{1}{R}\int e^{\frac{1}{RC}t} \cdot \frac{dE}{dt} + k$$

$$I(t) = e^{-\frac{1}{RC}t}\left\{\frac{1}{R}\int e^{\frac{1}{RC}t} \cdot \frac{dE}{dt} \cdot dt + k\right\}$$

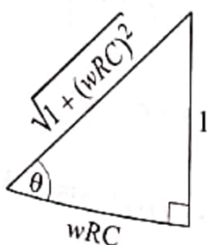
CASOS PARTICULARES

CASO A (Cuando la fuerza electromotriz $E(t)$ es constante)

En este caso, cuando $E(t) = 0$, E_0 es constante, se cumple que $\frac{dE}{dt} = 0$, por lo tanto la solución dada en (2) se convierte en: $I(t) = ke^{-\frac{1}{RC}t}$.

CASO B (Fuerza electromotriz senoidal)

Si $E(t) = E_0 \operatorname{sen}(wt)$, entonces $\frac{dE}{dt} = wE_0 \cos(wt)$ y la solución obtenida en (2) se convierte en:



$$I(t) = e^{-\frac{1}{RC}t}\left\{\frac{1}{R}\int e^{\frac{1}{RC}t} \cdot wE_0 sen(wt) \cdot dt + k\right\}$$

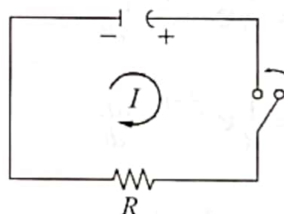
⇧ integrar por partes, para obtener:

$$= ke^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{wE_0 C}{1+(wRC)^2}(\cos(wt) + wRC\,\text{sen}(wt))$$

$$= ke^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{wE_0 C}{\sqrt{1+(wRC)^2}}\text{sen}\,(wt-\theta)$$

***Ejemplo 3*:**
Un circuito eléctrico consta de un condensador de capacidad C faradios en serie con una resistencia de R ohmios, teniendo una carga q_0 en el instante t_0.
Determine q en función de t.

***Solución*:**
El circuito es:



Por la ley de Kirchhoff tenemos:

$$E = V_C + V_R \quad \text{.........................} \quad (1)$$

diferencia de potencial en los bordes del capacitor que es: $V_C = \frac{q}{C}$

diferencia de potencial en los bordes del resistor que es $V_R = RI$ (ley de ohm).
Pero $I = \frac{dq}{dt}$, entonces $V_R = R\frac{dq}{dt}$

Así, la ecuación (1) se convierte en: $E = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt}$

Cuando $E = 0$, tendremos la ecuación diferencial:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad , \text{ que es equivalente a:}$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0 \quad \text{.........................} \quad (2)$$

La solución de (2) es $\quad q(t) = ke^{-\frac{1}{RC}t}$ .... (3)

- Imponer la condición inicial $q(t_0) = q_0$ en (3) para hallar k:

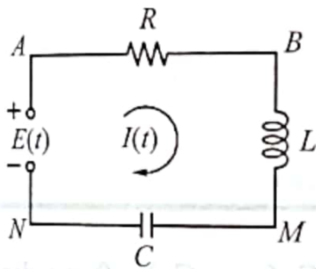
$$q_0 = ke^{-\frac{1}{RC}t_0} \quad \longrightarrow \quad k = q_0 e^{\frac{1}{RC}t_0} \quad \text{..........} \quad (4)$$

- Sustituir (4) en (3): $q(t) = q_0\, e^{\frac{1}{RC}t_0}\, e^{-\frac{1}{RC}t}$

$$\rightarrow \quad q(t) = q_0\, e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}$$

Ejemplo 4:

Modelo para la carga y la corriente en un circuito RLC.



Si en el circuito adjunto aplicamos la Ley de Kirchhoff tendremos:

$$E(t) = V_R + V_L + V_C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

- Cuando la corriente fluye de A hasta B, el voltaje V_R en el RESISTOR (por la ley de Ohm) es $V_R = RI(t)$.
- Cuando la corriente fluye de B a M, el voltaje V_L del inductor es $V_L = L\frac{dI}{dt}$ (Ley de Faraday)
- Cuando la corriente fluye de M a N, el voltaje del capacitor es:

$$V_C = \frac{1}{C}\left\{ q(t_0) + \int_{t_0}^{t} I(s)\,ds \right\} \quad \text{(Ley de Coulomb)}$$

Luego, al sustituir en (1), se obtiene:

$$E(t) \;=\; RI(t) \;+\; L\frac{dI}{dt} \;+\; \frac{1}{C}\left\{ q(t_0) \;+\; \int_{t_0}^{t} I(s)ds \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

- La ecuación (2) puede convertirse en una ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA de dos maneras.

Manera 1 Haciendo $q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} I(s)\,ds$

Al derivar respecto a t: $q'(t) = I(t)$

Nuevamente derivar: $q''(t) = I'(t)$

Al sustituir en (2) obtenemos: $E(t)=Rq'(t)+Lq''(t)+\frac{1}{C}q(t)$

Ordenando: $\boxed{E(t)=Lq''(t)+Rq'(t)+\frac{1}{C}q(t)}$

Manera 2 Si $E(t)$ es derivable, al derivar en (2) respecto a t, obtenemos:

$$E'(t)=RI'(t)+LI''(t)+\frac{1}{C}I(t)$$

Ordenando: $E'(t)=LI''(t)+RI'(t)+\frac{1}{C}I(t)$

4.3 TRAYECTORIAS ORTOGONALES

Dos familias uniparamétricas de curvas $G_1(x,y,C_1)=0$ y $G_2(x,y,C_2)=0$ se dicen que son ***trayectorias ortogonales***, si todas las curvas de la familia G_1 cortan perpendicularmente a todas las curvas de otra familia.

Ejemplo: La familia de curvas $G_1 \ : \ x=C_1y^2$, y

$$G_2 \ : \ x^2+\frac{y^2}{2}=C_2$$

son trayectorias ortogonales.

¿Cómo probar tal afirmación?

Bastará hallar la $\frac{dy}{dx}$ en G_1 y $\frac{dy}{dx}$ en G_2 y comprobar que el producto de ambas derivadas sea igual a -1.

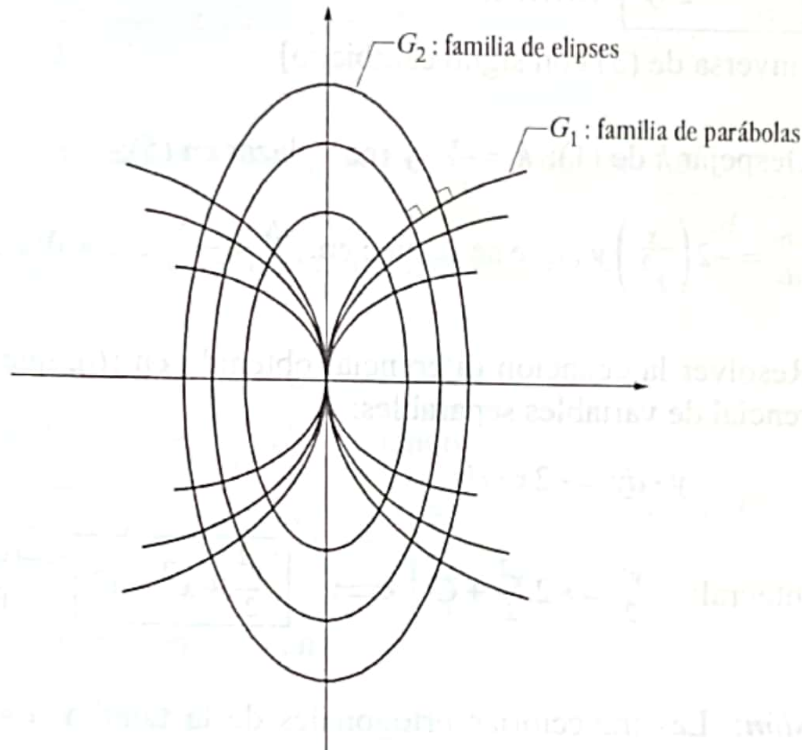
Veamos:

- Hallar $\frac{dy}{dx}$ en G_1 : $1=C_1\cdot 2y\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2C_1y}$
- Hallar $\frac{dy}{dx}$ en G_2 : $2x+\frac{1}{2}\cdot 2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}$
- Al multiplicar ambas derivadas: $\frac{1}{2C_1y}\left(-\frac{2x}{y}\right)=-1$

$$\frac{x}{C_1y^2}=1$$

$$x=C_1y^2 \quad \text{......................} \quad (1)$$

- El resultado obtenido en (1), nos indica que: ***una trayectoria ortogonal*** de la familia de curvas G_1, es una curva que corta de forma ortogonal cada curva de la familia G_2, es decir, en ángulos rectos. (ver figura).

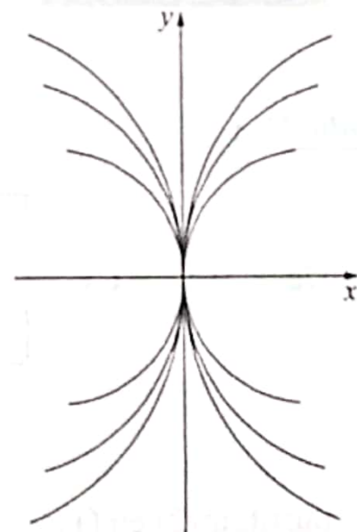


Problema 106 Halle las trayectorias ortogonales de la familia $\mathfrak{F}$ de curvas $x = k\,y^2$, donde k es una constante arbitraria.

Solución:

Se da como dato la familia de parábolas

$\mathfrak{F} : x = k\,y^2$ .... (1)



Paso 1: De la familia dada: $x = k\,y^2$, hallar la $\frac{dy}{dx}$

$$\Downarrow$$

$$1 = k \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{...... (2)}$$

Paso 2: Despejar: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky}$ .... (3)

Paso 3: Suponer que la pendiente de la segunda familia sea $\frac{dy}{dx}$ .... (4)

Como ambas familias son ortogonales, entonces: $y_1' \cdot y_2' = -1$. Por lo tanto la pendiente dada en (4), debe ser:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -2ky} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

[inversa de (3) con signo cambiado]

Paso 4: Despejar k de (1): $k = \frac{x}{y^2}$ y reemplazar en (5):

$$\frac{dy}{dx} = -2\left(\frac{x}{y^2}\right)y \text{, que se reduce en: } \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y},\ y \neq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Paso 5: Resolver la ecuación diferencial obtenido en (6), que es una ecuación diferencial de variables separables:

$$y \cdot dy = -2x \cdot dx$$

integral: $\frac{y^2}{2} = -2\frac{x^2}{2} + C \iff \boxed{\frac{y^2}{2} + x^2 = C}$ ⟸ es una familia de elipses para $C > 0$.

Conclusión: Las trayectorias ortogonales de la familia $x = ky^2$ es la familia $\frac{x^2}{2} + x^2 = C$, $C > 0$.

Problema 107 Halle las trayectorias ortogonales de la familia F de curvas $x^2 + y^2 = cx$.

Solución:

- De $x^2 + y^2 = Cx$
  - → Hallar $\frac{dy}{dx}$: $2x + 2yy' = C \rightarrow y' = \frac{C - 2x}{2y}$ …… (1)
  - → Despejar C: $C = \frac{x^2 + y^2}{x}$ ………………………… (2)

- Sustituir (2) en (1): $y' = \dfrac{\frac{x^2+y^2}{x} - 2x}{2y} \iff y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$ ……………… (3)

- Las trayectorias ortogonales deben tener:

pendiente $= -\frac{1}{y'} \Leftarrow$ inversa de (3) con signo cambiado:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{y^2 - x^2} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(4)}$$

- La ecuación diferencial dada en (4) se puede expresar como: $\underbrace{(x^2 - y^2)}_{M} dy = \underbrace{2xy}_{N} dx$

- Porque $\frac{\partial M}{\partial x} = 2x = \frac{\partial N}{\partial y}$, la ecuación diferencial es exacta.

- Suponer que la solución es $u(x, y) = C$

donde: $du = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}} \cdot dx + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}} \cdot dy$, siendo

$$= 2xy \cdot dx + (x^2 - y^2) \cdot dy \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(5)} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - y^2 \quad \ldots\ldots \text{(6)} \end{cases}$$

- Integrar respecto a x la función dada en (5)

$$u = 2y\frac{x^2}{2} + \varphi(y)$$

$$u = x^2 y + \varphi(y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(7)}$$

Hallar $\varphi(y)$

- Ahora derivar respecto a "y":

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(8)}$$

- Igualar (6) con (8): $x^2 - y^2 = x^2 + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = -y^2$

integrar $\varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + C_1 \ldots\ldots \text{(9)}$

- Sustituir (8) en (7): $u(x, y) = x^2 y - \frac{y^3}{3} + C_1$

4.4 MODELOS DE CRECIMIENTO POBLACIONAL (Ley de Malthus)

Suponer que: t = tiempo (variable independiente)
P = número de individuos en la población (variable dependiente)

- El modelo de la rapidez de crecimiento de la población se plantea del siguiente modo:

$$\underbrace{\frac{dP(t)}{dt}}_{\text{La rapidez de crecimiento de la población}} \underbrace{=}_{\text{es}} \underbrace{kP(t)}_{\text{Población al tamaño poblacional}} \quad , \quad k > 0$$

Resolver la E.D. : $\frac{dP}{P} = k\,dt$

impar : $\text{Ln}(P) = kt + C_1$ — si hacemos $C_1 = \text{Ln}(c)$

tenemos : $\text{Ln}(P) = kt + \text{Ln}(C)$

$$\text{Ln}(P) - \text{Ln}(C) = kt$$

$$Ln\left(\frac{P}{C}\right) = kt$$

$$\frac{P}{C} = e^{kt}$$

$$\boxed{P(t) = Ce^{kt}} \quad \begin{matrix} k > 0 \\ t \geq 0 \\ C > 0 \end{matrix}$$

- Si suponemos que la población inicial es P_0 para $t = 0$, obtendremos:

$$\boxed{P(t) = P_0 e^{kt}}$$

donde: P_0 población inicial
k : porcentaje de crecimiento poblacional.

Ejemplo 1.
Una población de protozoarios se desarrolla con una tasa relativa constante de crecimiento de 0.7944 por miembro por día. En el día cero, la población consta de dos miembros. Encuentre el tamaño de la población después de 6 días.

<u>Solución</u>:
El modelo es $P(t) = Ae^{kt}$

Datos
- $k = 0.794$
- Cuanto $t = 0$, $P(0) = 2 = Ae^{0.794(0)}$
  $2 = A$

Luego $P(t) = 2e^{0.974t}$, $t > 0$

Se pide hallar $P(6) = 2e^{0.794(6)}$ ⇐ En la calculadora

$= 2e^{4.764}$

$= 234.4276$

Ejemplo 2.

Un cultivo de bacterias se inicia con 500 y crece con una rapidez proporcional a su tamaño. Después de 3 horas, hay 800 bacterias.

a) Halle una expresión para la cantidad de bacterias después de t horas.

b) Encuentre la cantidad de bacterias después de 4 horas.

c) Encuentre la tasa de crecimiento después de 4 horas.

d) ¿Cuándo habrán 30,000 ejemplares?

Solución:

a) • El modelo es $P(t) = P_0 e^{k^t}$, donde $P_0 = 500$ (valor inicial)

entonces $P(t) = 500e^{kt}$, t : tiempo en horas.

• Después de $t = 3$ horas, hay $P(3) = 8000$ bacterias, entonces

$8000 = 500e^{3k}$, hallar $k = ?$

$80 = 5e^{3k}$

$16 = e^{3k}$

• Aplicar $\text{Ln}(\cdot)$: $\text{Ln}(16) = 3k$

$k = \frac{\text{Ln}(16)}{3}$

• En consecuencia la función exponencial buscada es: $P(t) = 500e^{\frac{\text{Ln}(16)}{3}t}$

donde: $e^{\frac{Ln(16)}{3}} = e^{\text{Ln}(16)^{\frac{1}{3}}} = 16^{\frac{1}{3}}$

Entonces la cantidad de bacterias después de t horas, es:

$$\boxed{P(t) = 500 \cdot 16^{\frac{1}{3}t} \quad , \quad t \geq 0}$$

b) Cuando $t = 4 \Rightarrow P(4) = 500 \cdot 16^{\frac{1}{3}(4)}$

$$= 500 \cdot 16^{\frac{4}{3}}$$

$$\approx 20{,}158.71817 \approx 20.159$$

c) La tasa de crecimiento después de 4 horas es:

$$\left[\frac{P(4)-P(0)}{P(0)}\right] \times 100\% = \frac{20159-500}{500} \times 100\% \approx$$

$$= 39.318 \times 100\%$$

$$= 3931.8\%$$

d) Para $P = 30000$, ¿Cuál es el valor de t?

$$300000 = 500\ 16^{\frac{t}{3}}$$

$$60 = 16^{\frac{t}{3}}$$

$$\text{Ln}(60) = \tfrac{t}{3}\text{Ln}(16)$$

$$t = \frac{3\text{Ln}(60)}{\text{Ln}(16)} \approx \frac{3(4.09434)}{2.77258} \approx 4.4 \text{ horas}$$

4.5 DECAIMIENTO RADIOACTIVO (o desintegración radioactiva)

Las sustancias radioactivas (tales como el uranio, el radio, el plutonio) disminuyen por la emisión espontánea de radiación. Si $m(t)$ es la masa restante a partir de una masa inicial m_0 de sustancias, después del tiempo t, se cumple que:

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

La solución es : $m(t) = Ce^{-kt}$, $k > 0$

Si la masa inicial es m_0 : $m(t) = m_0 e^{-kt}$, $k > 0$

Si la vida media del material radioactivo es t_0 años, siendo m_0 la masa inicial, entonces se cumple:

$$m(t_0) = \tfrac{1}{2}m_0$$

$$m_0 e^{-kt} = \tfrac{1}{2}m_0$$

Al resolver esta ecuación, hallamos el valor de k.

Ejemplo 1.

La vida media del radio 226 $\left({}^{226}_{88}\text{Ra}\right)$ es de 1590 años.

a) Una muestra de radio 226 tiene una masa de 100mg. Encuentre una fórmula para la masa de $\left({}^{226}_{88}\text{Ra}\right)$ que queda después de t años.

b) Halle la masa después de 1000 años, correcta hasta el miligramo más cercano.

c) ¿Cuándo se reducirá la masa hasta 30 mg.?

Solución:

a) Como dato se tiene $m_0 = 100\,\text{mg}$.

El modelo matemático es: $m(t) = 100e^{-kt}$

Si la vida media del radio 226 es 1590 años, entonces:

$$m(1590) = \tfrac{1}{2}m_0$$

$$100e^{-k(1590)} = \tfrac{1}{2}(100)$$

$$100e^{-1590k} = 50$$

$$e^{-1590k} = 0.5$$

Aplicar $\text{Ln}(\cdot)$ $\quad -1590k = \text{Ln}(\quad)$

$$-1590k = -0.69314718$$

$$k = 0.00043594$$

La función exponencial es: $\boxed{m(t) = 100e^{-0.00043594t} \quad , \quad t \geq 0}$ ....(*)

b) Para $t = 1000$,

$$m(1000) = 100e^{-0.00043594(1000)}$$

$$= 100e^{-0.43594}$$

$$= 64.66565242 \approx 65\,\text{mg}$$

c) Si $m = 30\,\text{mg}$, hallar t.

Sustituir en (*) :

$$30 = 100e^{-0.00043594t}$$

$$0.3 = e^{-0.00043594t}$$

Aplicar $\text{Ln}(\cdot)$ $\quad \text{Ln}(0.3) = -0.00043594t$

$$t = \frac{\text{Ln}(0.3)}{-0.00043594} \approx 2{,}761.785577$$

$$\approx 2{,}762 \text{ años}$$

4.6 LA ECUACIÓN LOGÍSTICA O LEY DE VERHULST

Si $P(t)$ es el tamaño de la población en el momento "t", se supone que "la tasa de crecimiento $= \frac{dP}{dt}$" está próxima a ser "proporcional al tamaño $= kP$", esto es:

$$\frac{dP}{dt} \approx kP \quad \text{si } P \text{ es pequeña}$$

Esta relación indica que la tasa de crecimiento (k) está próxima a ser proporcional al tamaño. Esto es, la tasa de crecimiento $\left(\frac{dP}{dt}\right)$ es casi igual a k (cuando P es pequeña), lo cual se expresa como:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} \approx k$$

Pero la tasa relativa de crecimiento (k) disminuye a medida que aumenta la población y se vuelve negativa si P sobrepasa su capacidad de contención k, la población máxima que el medio es capaz de sostener a la larga. En este caso la proporción es:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} \approx k\left(1 - a\frac{P}{K}\right)$$, "a es factor de proporcionalidad de $\frac{P}{k}$

Ahora resolvamos la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{aP}{K}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \frac{dP}{P\left(1 - \frac{a}{K}P\right)} = k \cdot dt$$

Integrar: $$\int \frac{dP}{P\left(1 - \frac{a}{K}P\right)} = kt + C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

⇧

Por fracciones parciales.

$$\frac{1}{P\left(1-\frac{a}{K}P\right)}=\frac{A}{P}+\frac{B}{1-\frac{a}{K}P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{1=A\left(1-\frac{a}{K}P\right)+BP} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

En (3) $\begin{cases} \text{Si } P=0 \Rightarrow 1=A \\ \text{Si } \frac{k}{a} \Rightarrow 1=B\left(\frac{k}{a}\right) \Rightarrow B=\frac{a}{k} \end{cases}$

Luego, sustituir en (2) y luego en (1) para integrar:

$$\int \frac{1}{P}dP+\int \frac{\frac{a}{k}}{1-\frac{a}{k}P}dP=kt+C$$

$$\text{Ln}|P| + \int \frac{a}{k-aP}dp = kt+C$$

$$\text{Ln}|P| - \text{Ln}|k-aP| = kt+C$$

$$Ln\left|\frac{P}{k-aP}\right| = kt+C$$

$$\frac{P}{k-aP}=e^{kt+C}$$

$$\frac{P}{k-aP}=e^{kt}\cdot e^{C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Imponiendo la condición inicial: P_0 para $t=0$

$$\frac{P_0}{k-aP_0}=e^{0}\cdot e^{C} \iff e^{C}=\frac{P_0}{k-aP_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Sustituir (5) en (4): $$\frac{P}{k-aP}=\underbrace{e^{kt}\cdot\frac{P_0}{k-aP_0}}_{M}$$

$$\frac{P}{k-aP}=M$$

Despejar P:

$$P=kM-aPM$$

$$P+aMP=kM$$

$$P(1+aM)=kM$$

$$P = \frac{kM}{1+aM}$$

$$P = \frac{k\left[e^{kt}\,\frac{P_0}{k-aP_0}\right]}{1+a\left[e^{kt}\,\frac{P_0}{k-aP_0}\right]}$$

$$= \frac{kP_0\,e^{kt}}{k-aP_0+aP_0\,e^{kt}}$$

$$\boxed{P(t) = \frac{kP_0}{(k-aP_0)e^{-kt}+aP_0} \quad , \quad t>0}$$

Observación:
Si en la ecuación logística consideramos $a=1$, vamos a tener:

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP\left(1-\frac{P}{k}\right)}$$

si P es pequeña en comparación con k, entonces $\frac{P}{k}$ es cercano a cero, y por tanto $\frac{dP}{dt} \approx kP$.

Si P se acerca a k, entonces $\frac{P}{k}$ se acerca a 1 $\left(\frac{P}{k} \to 0\right)$ y por tanto $\frac{dP}{dt}$ se acerca a cero $\left(\frac{dP}{dt} \to 0\right)$.

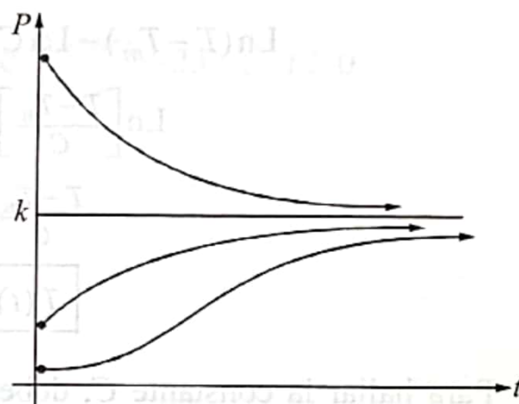
Si $0<P<k$ entonces $0<\frac{P}{k}<1$, también $0>-\frac{P}{k}>-1$; al sumar 1 obtenemos $1>1-\frac{P}{k}>0$, lo cual implica que $\frac{dP}{dt}>0$. Ahora, si $\frac{dP}{dt}>0$, afirmamos que $P(t)$ es creciente.

En el caso: $P>k$, lo cual implica $1-\frac{P}{k}$ es negativo y por ende $\frac{dP}{dt}<0$, este resultado implica que $P(t)$ es decreciente.

- La solución de (I) es: $\quad P(t) = \dfrac{kP_0}{P_0+(k-P_0)e^{-kt}}$

  haciendo $\dfrac{k-P_0}{P_0} = A$, $\quad P(t) = \dfrac{k}{1+Ae^{-kt}}$

donde $\lim_{t \to +\infty} P(t) = k$.



- La gráfica de $P(t)$ puede ser:
- La ecuación logística es autónoma porque $\frac{dP}{dt}$ depende de P y no de t.

4.7 LA LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

Supongamos que: T es la variable temperatura, y
t es la variable tiempo

donde "la temperatura T es función del tiempo t, esto es,

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \mathbb{R}_0^+ = \{t / t \geq 0\} \\ t &\longmapsto T(t) \end{aligned}$$

Suponer que "T" es la temperatura de un cuerpo y que se encuentra en un ambiente que tiene temperatura T_m, entonces:

La tasa de cambio de enfriamiento de la temperatura $T(t)$ de un cuerpo con respecto al tiempo t.	es	Proporcional a la diferencia de temperatura T del cuerpo y la temperatura T_m del medio ambiente que lo rodea.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \quad , \quad k > 0 \quad , \quad T > T_m$$

⇧ es una E.D. de variables separadas

k : Constante de proporcionalidad.

- Resolvamos la E.D. :

Hacer:

$$\frac{dT}{T - T_m} = -k \cdot dt$$

Integrar:

$$\text{Ln}(T - T_m) = -kt + \underbrace{\text{Ln}\, C}_{\text{constante de integración, con } C > 0}$$

$$\operatorname{Ln}(T - T_m) - \operatorname{Ln} C = -kt$$

$$\operatorname{Ln}\left[\frac{T - T_m}{C}\right] = -kt$$

$$\frac{T - T_m}{C} = e^{-kt}$$

$$\boxed{T(t) = Ce^{-kt} + T_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Para hallar la constante *C*, debemos imponer la condición inicial $T(0) = T_0$ en la función solución obtenido en (1).

$$T_0 = Ce^{k(0)} + T_m$$

$$T_0 = C + T_m$$

$$C = T_0 - T_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

- Sustituir (2) en (1): $\boxed{T(t) = (T_0 - T_m)e^{-kt} + T_m}$ $k > 0$, $t \geq 0$ $T_0 =$ temperatura inicial. $T_m =$ temperatura del ambiente.

Ejemplo 1.
Una torta recién sacada del horno a una temperatura de 176ºC se expone a una temperatura ambiente de 23°C. Al cabo de 80 minutos, su temperatura es de 63°C.
a) Hallar la función que expresa la temperatura de la torta para *t* minutos.
b) graficar la función temperatura.

***Solución*:**
Como datos se tiene: $T_0 = 176°C$, $T_m = 23°C$, $T(80) = 63°C$.
La función temperatura que exprese el enfriamiento de la torta es:

$$T(t) = (T_0 - T_m)e^{-kt} + T_m$$

$$63 = (176 - 23)e^{-80k} + 23$$

$$40 = 153e^{-80k}$$

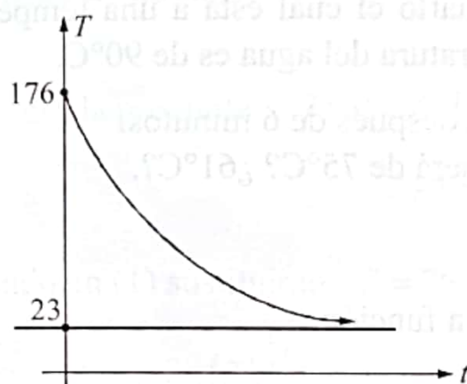
$$\frac{40}{153} = e^{-80k}$$

Aplicar Ln : $$\operatorname{Ln}\left(\frac{40}{153}\right) = -80k$$

$$k = 0.0167$$

Entonces la función de temperatura es: $T(t)=153e^{-0.0167t}+23 \quad , \quad t\geq 0$

b) Su gráfica es:



Ejemplo 2.

Sabiendo que un cuerpo en el aire a 10°C se enfría desde 200°C a 100°C en 40 minutos, dígase en ¿cuánto tiempo se enfriará desde 100°C a 10°C en el aire a 5°C?

<u>Solución</u>:

Datos: $T_m=10°\text{C}$, $T_0=200°\text{C}$, $T(40)=100°\text{C}$

- De la función $T(t)=(T_0-T_m)e^{-kt}+T_m$

  Se obtiene: $\dfrac{T-T_m}{T_0-T_m}=e^{-kt}$

  $$\underbrace{\text{Ln}\left[\frac{T-T_m}{T_0-T_m}\right]}=-kt$$

  $$-\text{Ln}\left[\frac{T_0-T_m}{T-T_m}\right]=-kt$$

  $$k=\tfrac{1}{t}\text{Ln}\left[\frac{T_0-Tm}{T-T_m}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

- Sustituir datos: $k=\tfrac{1}{40}\text{Ln}\left[\dfrac{200-10}{100-10}\right]$

  $k=0.01868$

- Entonces $T(t)=190e^{-0.01868t}+10$

De (*): $t=\tfrac{1}{k}\text{Ln}\left[\dfrac{T_0-T_m}{T-T_m}\right]$

Ahora, responde la interrogante:

$$=\frac{1}{0.01868}\text{Ln}\left[\frac{100-5}{10-5}\right]$$

$$=\frac{1}{0.01868}\text{Ln}\left[\frac{95}{5}\right]$$

$$=\frac{1}{0.01868}\text{Ln}(19)$$

$$=157.6252 \text{ min}.$$

Ejemplo 3.

Se calienta agua a temperatura del punto de ebullición de 100°C. El agua se remueve luego del calor y se guarda en un cuarto el cual está a una temperatura constante de 60°C. Después de 3 minutos la temperatura del agua es de 90°C.

a) Encuentre la temperatura del agua después de 6 minutos.
b) ¿Cuándo la temperatura del agua será de 75°C? ¿61°C?.

Solución:

Por la ley de enfriamiento se obtiene la función.

$T(t) = (T_0 - T_m)e^{-kt} + T_m$. En este modelo "k" es el parámetro

El parámetro k es $k = \frac{1}{t}\text{Ln}\left[\frac{T_0 - T_m}{T - T_m}\right]$ y el tiempo t es: $t = \frac{1}{k}\text{Ln}\left[\frac{T_0 - T_m}{T - T_m}\right]$

a) Se pide hallar T cuando $t = 6$ minutos .

Para ello debo hallar, en primer lugar, la función $T(t)$.

Datos:

$T_0 = 100°\text{C}$, $T_m = 60°\text{C}$, cuando $t = 3$ min. se tiene $T = 90°\text{C}$

- El valor de k es:

$$k = \frac{1}{t}\text{Ln}\left[\frac{T_0 - T_m}{T - T_m}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\text{Ln}\left[\frac{100-60}{90-60}\right]$$

$$k = \frac{1}{3}\text{Ln}\left(\frac{4}{3}\right)$$

- La ley de enfriamiento está definida por la función:

$$T(t) = (100 - 60)e^{-\frac{1}{3}\text{Ln}\left(\frac{4}{3}\right)t} + 60$$

donde: $e^{-\frac{1}{3}Ln\left(\frac{4}{3}\right)} = e^{\text{Ln}\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$

En consecuencia, la función de enfriamiento es:

$$\boxed{T(t)=40\left(\tfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}t}+60} \qquad t\geq 0 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ (1)$$

- Ahora, responder la pregunta: $T(6)=40\left(\tfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}(6)}+60$

$$=82.5°C$$

b) Hallar $t=?$ cuando en (1) sustituimos $T=75$:

$$75=40\left(\tfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}t}+60$$

$$\frac{75-60}{40}=\left(\tfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}t}$$

$$\tfrac{3}{8}=\left(\tfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}t}$$

Aplicar Ln : $\qquad \mathrm{Ln}\left(\tfrac{3}{8}\right)=\tfrac{1}{3}t\,\mathrm{Ln}\left(\tfrac{3}{4}\right)$

$$t=\frac{3\,\mathrm{Ln}\left(\frac{3}{8}\right)}{\mathrm{Ln}\left(\frac{3}{4}\right)}=10.2282 \text{ min.}$$

- Hallar $t=?$, cuando $T=61°C$

Respuesta: $t=38.46829$

PROBLEMAS PROPUESTOS

GRUPO 01. Ecuaciones diferenciales de variables separables.

01. (*Pérdida de una solución.*) A veces, al reescribir una EDO para separar las variables puede perderse de forma inadvertida una solución. obtenga todas las soluciones de la EDO $y' = 2xy^2$, pero procure no perder ninguna solución.

02. Encuentre todas las soluciones $y = y(x)$ de cada EDO. [Sugerencia: tenga cuidado con las soluciones que se hayan perdido al separar las variables. *Véase* el problema 1.]

a) $dy/dx = 4xy$ b) $2ydx + 3xdy = 0$ c) $y' = xe^{-x+y}$

d) $(1-x)y' = y^2$ e) $y' = -y/(x^2-4)$ f) $y' = xe^{y-x^2}$

03. Para cada PVI encuentre una fórmula de solución y el intervalo más grande de x sobre el que se defina. Para los incisos (b) y (e) obtenga las fórmulas de solución y también resuelva los PVI con un medio numérico de resolución.

a) $y' = (y+1)/(x+1)$, $y(1) = 1$ b) $y' = y^2/x$, $y(1) = 1$

c) $y' = ye^{-x}$, $y(0) = e$ d) $y' = 3x^2/(1+x^3)$, $y(0) = 1$

e) $y' = -x/y$, $y(1) = 2$ f) $2xyy' = 1 + y^2$, $y(2) = 3$

04. Para cada EDO encuentre la fórmula de solución general pero no trate de despejar como función explícita de x.

a) $y' = (x^2+2)(y+1)/xy$ b) $(1+\operatorname{sen} x)dx + (1+\cos y)dy = 0$

c) $(\tan^2 y)dy = (\operatorname{sen}^3 x)dx$ d) $(3y^2+2y+1)y' = x\operatorname{sen}(x^2)$

05. (*Cambio logístico.*) Los problemas siguientes se relacionan con el crecimiento y el decaimiento logísticos.

a) Resuelva los PVI $y' = (1-y/20)y$, $y(0) = 5$, 10, 20, 30.

b) Trace las curvas solución del inciso (a) en el intervalo $0 \le t \le 10$ y destaque la capacidad de carga.

c) (*Captura.*) La EDO $y' = 3(1-y/12)y - 8$ modela los cambios de una población capturada que sufre cambios logísticos. Encuentre los dos niveles de equilibrio y explique lo que sucede con las especies si $y(0) = 2, 4, 6, 8$ ó 10.

d) Trace las curvas solución del inciso (c) en el intervalo $0 \le t \le 5$ y destaque los niveles de equilibrio.

e) Una colonia de bacterias crece de acuerdo con la ley logística, con una capacidad de carga de 5×10^8 individuos y una tasa de crecimiento natural $r = 0.01$ días^{-1}. ¿Cuál será la población después de dos días si ésta inició en 1×10^8 individuos?

06. (*Movimiento de un proyectil: amortiguamiento newtoniano.*) Se observa que un proyectil esférico de 100 lb. tiene una velocidad límite de -400 pies/s.

a) Demuestre que la velocidad v del proyectil que experimenta un movimiento vertical ascendente o descendente y sobre el que actúa la resistencia newtoniana del aire se expresa con $v' = -g - (gk/w)v|v|$, donde la magnitud de k es de 1/1600 y $w = mg$ es el peso del proyectil.

b) Modele el movimiento del proyectil como un sistema diferencial en las variables de estado y y v, donde $v = y'$.

c) Si el proyectil es disparado hacia arriba en sentido vertical desde el piso con una velocidad inicial de 500 pies/s, ¿cuál es su velocidad cuando choca contra el suelo? [Sugerencia: utilice un medio numérico de resolución para hallar la solución del sistema del inciso (b) con las condiciones iniciales convenientes. Utilícelo también para graficar la solución $v = v(t)$ y $y = y(t)$ como una curva paramétrica en el plano vy. Explique por qué. Repita el procedimiento para $v_0 = 100, 200, \ldots, 1000$ pies/s. [Sugerencia: utilice un medio numérico de resolución y grafique $y(t)$.]

07. (*Velocidad newtoniana del paracaidista.*) En el ejemplo 1.6.7 se demostró que la velocidad $v(t)$ del paracaidista satisface el PVI $v' = -g + Kv^2/m$, $v(0) = 0$. Separe las variables y por medio de fracciones parciales y operaciones algebraicas obtenga la fórmula de solución:

$$v(t) = \left(\frac{mg}{k}\right)^{1/2} \frac{e^{-At} - 1}{e^{At} + 1}, \text{ donde } A = 2\left(\frac{gk}{m}\right)^{1/2}$$

08. (*Paracaidista: amortiguamiento newtoniano.*) Un paracaidista y su equipo pesan 240 lb [Nota: peso $= mg$] En caída libre el paracaidista alcanza una velocidad límite de 250 pies/s. Poco después de que se abre el paracaídas el paracaidista salta de un aeroplano a 10 000 pies. Use $g = 32.2$ pies/s^2 y responda las siguientes preguntas acerca del segundo salto.

a) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir antes de que el paracaidista en caída libre alcance una velocidad de 100 pies/s? [Sugerencia: Use la información para determinar el coeficiente k del PVI (16); luego, use la fórmula (18).]
b) Cuando el paracaidista va a 100 pies/s tira de la cuerda y el paracaídas se abre instantáneamente. ¿Cuánto tiempo le toma alcanzar una velocidad de descenso de 25 pies/s?
c) ¿Cuánto dura el último salto? ¿Cuál es la velocidad de aterrizaje?.

09. (*Una población logística con captura.*) Un problema de valor inicial para una población logística con captura a una tasa constante está dado por

$$y' = y(1 - y/10) - 9/10 \;\;,\; y(0) = y_0$$

a) Encuentre la fórmula de solución para este PVI. [Sugerencia: tómese el tiempo suficiente para la realización de las operaciones algebraicas.]
b) Grafique algunas curvas solución para el PVI.

10. (*Fórmula de solución para las EDO exactas.*) La EDO de primer orden

$$N(x,y)\,y' + M(x,y) = 0$$

es ***exacta*** en un rectángulo R del plano xy si M y N son derivables y continuas en R y si hay una función $H(x,y)$ tal que $\frac{\partial H}{\partial y} = N$, para toda (x,y) en R. A la función H se le conoce como ***integral*** de la EDO. Si la EDO es exacta, entonces su solución general es $H(x,y) = C$, donde la constante C debe elegirse de manera apropiada. Las curvas de nivel de una integral se denominan ***curvas integrales.*** Es posible demostrar que la ***condición de exactitud***

$$\partial H / \partial x = \partial M / \partial y$$

para toda (x,y) en R garantiza que existe una función H con las propiedades deseadas. Entonces si la EDO satisface la condición de exactitud, todo lo que se necesita hacer para construir la solución general $H(x,y) = C$ es calcular H. Esto puede llevarse a cabo con los siguientes pasos: (1) Compruebe que se cumple la condición de exactitud; (2) considere y como constante y evalúe la antiderivada de x $\int M(x,y)dx$, escriba $H = \int M(x,y)dx + g(y)$ en términos de una función desconocida g; (3) entonces

$$g'(y)\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = N - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

que resulta de que $\partial H/\partial y = N$ (definición de exactitud); (4) la condición de exactitud implica que $N-(\partial/\partial y)\int M(x,y)dx$ es independiente de x (a pesar de las apariencias), ya que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right]$$
$$=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=0$$

Así $g(y)$ está dada por cualquier antiderivada de $g'(y)$; (5) $H=\int M(x,y)dx+g(y)$ es una integral de la EDO, y la solución general es $H(x,y)=C$

a) Demuestre que si la EDO es exacta, entonces puede escribirse como $d(H(x,y(x)))/dx=0$. Concluya que $y(x)$ es una solución de la EDO si y sólo si su curva solución queda en un conjunto de nivel de *H*.

b) Demuestre que la EDO separable $N(y)y'+M(x)=0$ es exacta si *N* y *M* son continuas.

c) Demuestre que $(2y-x)y'=y-2x$ es exacta. Encuentre una integral *H* y la solución general. Trae las curvas integrales en el rectángulo $|x|\le 5$, $|y|\le 4$. Destaque algunas curvas solución $y=y(x)$.

d) (*Osos de felpa.*) Demuestre que

$$[\operatorname{sen} y-2\operatorname{sen}(x^2)\operatorname{sen}(2y)]y'+\cos x+2x\cos(x^2)\cos(2y)=0$$

es exacta. Encuentre una integral *H* y grafique varias curvas integrales para $|x|\le 6$, $|y|\le 10$. ¿Cuál es la solución general?

e) Demuestre que $xe^y(y^2+2y)y'+y^2e^y+2x=0$ es exacta en el plano *xy*. Encuentre una integral *H* y la solución general; trace varias curvas integrales en el rectángulo $|x|\le 5$, $|y|\le 4$.

f) Demuestre que $y'\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y-\cos x\cos y=0$ es exacta en el plano *xy*. Encuentre una integral *H* y la solución general; grafique varias curvas integrales en el rectángulo $|x|\le 5$, $|y|\le 4$.

g) Una EDO no exacta puede volverse exacta si se le multiplica por un factor de integración. Demuestre que $\cos x$ es un factor de integración para la EDO no exacta $\cos x\,dy - -(2y\operatorname{sen} x-3)dx=0$. Luego, obtenga la solución general y grafique algunas curvas integrales en el rectángulo $|x|\le 5$, $|y|\le 5$.

GRUPO 02. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciables (variables separables)

01. $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$

02. $(1+y^2)dx+xy\,dy=0$

03. $(y^2+xy^2)y'+x^2-yx^2=0$

04. $(1+y^2)dx=xdy$

05. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}dy=0$

06. $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$, $y\big|_{x=0}=0$

07. $e^{-y}(1+y')=1$

08. $y\ln y\,dx+xdy=0$, $y\big|_{x=1}=1$.

09. $y'=a^{x+y}$ $(a>0, a\neq 1)$.

10. $e^y(1+x^2dy-2x(1+e^y)dx=0$.

11. $(1+e^x)yy'=e^y$, $y\big|_{x=0}=0$

12. $(1+y^2)(e^{2x}dx-e^ydy)-(1+y)dy=0$.

13. $(xy^2-y^2+x-1)dx+(x^2y-2xy+x^2+2y-2x+2)dy=0$

14. $y'=\text{sen}(x-y)$.

15. $y'=ax+by+c$ $(a,b,c-\text{const})$.

16. $(x+y)^2y'=a^2$.

17. $(1-y)^2y'+\dfrac{y^2}{x\ln x}=0$.

18. $(1+y^2)dx=(y-\sqrt{1+y^2})(1+x^2)^{\frac{3}{2}}dy$.

19. $xy^2(xy'+y=a^2$.

20. $(x^2y^2+1)dx+2x^2dy=0$ (sustitución $xy=t$).

21. $(1+x^2y^2)y+(xy-1)^2xy'=0$. (la sustitución $xy'=t$)

22. $(x^2y^3+y+x-2)dx+(x^3y^2+x)dy=0$. (la sustitución $xy=t$)

23. $(x^6-2x^5+2x^4-y^3+4x^2y)dx+(xy^2-4x^3)dy=0$. (la sustitución $y=tx$).

24. $y'+1=\dfrac{(x+y)^m}{(x+y)^n+(x+y)^p}$.

25. $(\ln x+y^3)dx-3xy^2dy=0$.

26. $(xy+2xy\ln^2y+y\ln y)dx+(2x^2\ln y+x)dy=0$. (sustitución $x\ln y=t$).

27. $y-xy'=a(1+x^2y')$.

28. $(a^2+y^2)dx+2x\sqrt{ax-x^2}dy=0$, $y\big|_{x=a}=0$.

29. $y'+\text{sen}\dfrac{x+y}{2}=\text{sen}\dfrac{x-y}{2}$

GRUPO 03. En los siguientes ejercicios hay que hallar las soluciones de las ecuaciones que cumplen las condiciones indicadas para $x \to \pm\infty$.

01. $x^2 y' \cos y + 1 = 0$, $y \to \frac{16}{3}\pi$, $x \to +\infty$.

02. $x^2 y' + \cos 2y = 1$, $y \to \frac{10}{3}\pi$, $x \to +\infty$.

03. $x^3 y' - \operatorname{sen} y = 1$, $y \to 5\pi$, $x \to \infty$.

04. $(1+x^2)y' - \frac{1}{2}\cos^2 2y = 0$, $y \to \frac{7}{2}\pi$, $x \to -\infty$.

05. $e^y = e^{4y} y' + 1$, y es acotada para $x \to +\infty$.

06. $(x+1)y' = y - 1$, y es acotada para $x \to +\infty$.

07. $y' = 2x(\pi + y)$, y es acotada para $x \to \infty$

08. $x^2 y' + \operatorname{sen} 2y = 1$, $y \to \frac{11}{4}\pi$, $x \to +\infty$

GRUPO 04. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciables (homogéneas o reducible a ellas)

01. $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$.

02. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

03. $4x^2 - xy + y^2 + y'(x^2 - xy + 4y^2) = 0$.

04. $4x^2 + xy - 3y^2 + y'(-5x^2 + 2xy + y^2) = 0$.

05. $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$.

06. $2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2)$.

07. $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$.

08. $ax^2 + 2bxy + cy^2 + y'(bx^2 + 2cxy + fy^2) = 0$.

09. $(y^4 - 3x^2)dy = -xy\,dx$.

10. $y^3 dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$.

11. $(y - xy')^2 = x^2 + y^2$.

12. $3x + y - 2 + y'(x - 1) = 0$

13. $2y + 2y - 1 + y'(x + y - 2) = 0$

14. $3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$

15. $(y + y\sqrt{x^2 y^4 + 1})dx + 2x\,dy = 0$

16. $4xy^2 dx + (3x^2 y - 1)dy = 0$

17. $(x + y^3)dx + (3y^5 - 3y^2 x)dy = 0$.

18. $2(x^2 y + \sqrt{1 + x^4 y^2}\,dx + x^3 dy = 0$.

19. $(2x - 4y)dx + (x + y - 3)dy = 0$

20. $(x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0$.

21. $(x - y + 3)dx + (3x + y + 1)dy = 0$.

22. $(x + y)dx + (x + y - 1)dy = 0$.

23. $y\cos x\,dx+(2y-\operatorname{sen}x)dy=0$

24. $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0$

25. $y^3dy+3y^2x\,dx+2x^3dx=0$.

26. $y\,dx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0$

27. Hallar una curva que posea la propiedad de que la magnitud de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a la tangente sea igual a la abscisa del punto de contacto.

28. Hallar la curva para la cual la razón del segmento interceptado por la tangente en el eje OY al radio vector es una cantidad constante.

29. Empleando coordenadas rectangulares, hallar la forma del espejo si los rayos que parten de un punto dado, al reflejarse, son paralelos a una dirección dada.

30. Hallar la curva para la cual la longitud del segmento interceptado en el eje de coordenadas por la normal a cualquiera de sus puntos, es igual a la distancia desde este punto al origen de coordenadas.

31. Hallar la curva para la cual el producto de la abscisa de cualquiera de sus puntos por la magnitud del segmento interceptado en el eje OY por la normal, es igual al duplo del cuadrado de la distancia desde este punto al origen de coordenadas.

GRUPO 05. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden (ecuaciones de Bernoulli)

01. $y'+2y=x^2+2x$.

02. $(x^2+2x-1)y'-(x+1)y=x-1$

03. $x\ln x\cdot y'-y=x^3(3\ln x-1)y'$

04. $(a^2-x^2)y'+xy=a^2$

05. $2xy'-y=3x^2$

06. $(x+1)dy-[2y+(x+1)^4]dx=0$

07. $y'=\frac{1}{x\operatorname{sen}y+2\operatorname{sen}2y}$.

08. $y'-2xy=2xe^{x^2}$

09. $x(x^3+1)y'+(2x^3-1)y=\frac{x^3-2}{x}$

10. $y'+y\cos x=\operatorname{sen}x\cos x$, $y\big|_{x=0}=1$

11. $x\ln x\cdot y'-(1+\ln x)y+\frac{1}{2}\sqrt{x}(2+\ln x)=0$

12. $3xy'-2y=\frac{x^3}{y^2}$

13. $8xy'-y=-\frac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$

14. $(xy+x^2y^3)y'=1$

15. $y'-y=2xe^{x+x^2}$

16. $xy'=y+x^2\operatorname{sen}x \quad\Rightarrow\quad y'-\frac{1}{x}y=x\operatorname{sen}x$

17. $x^2y'+2x^3y=y^2(1+2x^2)$

18. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}$

19. $2\operatorname{sen} x \cdot y' + y\cos x = y^3 (x\cos x - \operatorname{sen} x)$

20. $y' = \dfrac{3x^2}{x^3 + y + 1}$

21. $y' + y\dfrac{x + \frac{1}{2}}{x^2 + x + 1} = \dfrac{(1 - x^2)y^2}{(x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}}$

22. $3y' + y\dfrac{x^2 + a^2}{x(x^2 - a^2)} = \dfrac{1}{y^2}\dfrac{x(3x^2 - a^2)}{x^2 - a^2}$

23. $(1 + x^2)y' = xy + x^2 y^2$

24. $y' + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3 y^2$

25. $(x^2 + y^2 + 1)dy + xy\,dx = 0$

26. $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$

27. $x(x-1)y' + y = x^2(2x - 1)$

28. $y' - y\,tg\,x = \sec x$, $y|_{x=0} = 0$

29. $y'\cos y + \operatorname{sen} y = x + 1$

30. $y' + \operatorname{sen} y + x\cos y + x = 0$

31. $y' - \dfrac{ny}{x+1} = e^x (1 + x)^n$

32. $\displaystyle\int_0^1 \varphi(ax)d\alpha = n\varphi(x)$

33. $y' + x\operatorname{sen} 2y = xe^{-x^2}\cos^2 y$. (la sustitución $t = tg\,y$)

En los problemas que se dan a continuación hay que hallar las soluciones de las ecuaciones que satisfacen a las condiciones indicada:

34. $y' - 2xy = \cos x - 2x\operatorname{sen} x$, y es una función acotada cuando $x \to \infty$

35. $2\sqrt{x}y' - y = -\operatorname{sen}\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}$, y es acotada cuando $x \to +\infty$

36. $y' - y\ln 2 = 2^{\operatorname{sen} x}(\cos x - 1)\ln 2$, y es acotada cuando $x \to +\infty$

37. $2x^2 y' - xy = 2x\cos x - 3\operatorname{sen} x$, $y \to 0$ cuando $x \to +\infty$

38. $y'\operatorname{sen} x - y\cos x = -\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$, $y \to 0$ cuando $x \to \infty$

39. $(1 + x^2)\ln(1 + x^2)y' - 2xy = \ln(1 + x^2) - 2x\operatorname{arctg} x$, $y \to -\frac{\pi}{2}$ cunado $x \to -\infty$

40. $y' - e^x y = \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x} - e^x\cos\frac{1}{x}$, $y \to 2$ cuando $x \to -\infty$

41. $y' - y\ln x = -(1 + 2\ln x)x^{-x}$, $y \to 0$ cuando $x \to +\infty$

GRUPO 06. Integrar las ecuaciones

01. $x(2x^2+y^2)+y(x^2+2y^2)y'=0$

02. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$

03. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$

04. $\left(3x^2tg\,y-\frac{2y^3}{x^3}\right)dx+\left(x^3\sec^2y+4y^3+\frac{3y^2}{x^2}\right)dy=0$

05. $\left(2x+\frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx=\frac{x^2+y^2}{xy^2}dy$

06. $\left(\frac{\operatorname{sen}2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\operatorname{sen}^2x}{y^2}\right)dy=0$

07. $(3x^2-2x-y)dx+(2y-x+3y^2)dy=0$

08. $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+y^2}}+2xy-\frac{y}{x}\right)dx+(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x)dy=o$

09. $\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=0$

10. $\left(\operatorname{sen}y+y\operatorname{sen}x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0$

11. $\frac{y+\operatorname{sen}x\cos^2xy}{\cos^2xy}dz+\left(\frac{x}{\cos^2xy}+\operatorname{sen}y\right)dy=0$

12. $\frac{2x\,dx}{y^3}+\frac{(y^2-3x^2)dy}{y^4}=0\;,\;\; y\big|_{x=1}=1$

13. $\{n\cos(nx+my)-m\operatorname{sen}(mx+ny)\}dx+\{m\cos(nx+my)-n\operatorname{sen}(mx+ny)\}dy=0$

14. $\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}+\left(\frac{1}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^2}\right)\times(y\,dx-x\,dy)=0$

15. $\left(\frac{1}{y}\operatorname{sen}\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\operatorname{sen}\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)dy=0$

16. $y(x^2+y^2+a^2)dy+x(x^2+y^2-a^2)dx=0$

17. $(x^2+y^2+1)dx-2xy\,dy=0$, $\mu=\varphi(y^2-x^2)$

18. $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$, $\mu=\varphi(x)$

19. $(3x^2y+y^3)dx+(x^3+3xy^2)dy=0$

20. $x\,dx+y\,dy+x(x\,dy-y\,dx)=0$, $\mu=\varphi(x^2+y^2)$

21. $(x^2+y)dx-x\,dy=0$, $\mu=\varphi(x)$

22. $(x+y^2)dx-2xy\,dy=0$, $\mu=\varphi(x)$

23. $(2x^2y+2y+5)dx+(2x^3+2x)dy=0$, $\mu=\varphi(x)$

24. $(x^4\ln x-2xy^3)dx+3x^2y^2dy=0$, $\mu=\varphi(x)$

25. $(x+\text{sen}\,x+\text{sen}\,y)dx+\cos y\,dy=0$, $\mu=\varphi(x)$

26. $(2xy^2-3y^3)dx+(7-3xy^2)dy=0$, $\mu=\varphi(y)$

27. $(3y^2-x)dx+(2y^3-6xy)dy=0$, $\mu=\varphi(x+y^2)$

GRUPO 07. Hallar las trayectorias ortogonales para las siguientes familias de curvas:

01. $y=\frac{a}{x}$

02. $x^2-y^2=ax$

03. $y=ae^{\frac{x}{a}}$

04. $y=Cx-C-C^2$

05. $y=e^x(ax+b)$

06. $y^2=2Cx+C^2$

07. $y=ax^2+bx+C$

08. $y=C_1x+\frac{C_2}{x}+C_3$

09. $(x-a)^2+(y-b)^2=1$

10. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$

11. $y=a\,\text{sen}(x+\alpha)$

12. $y^2+2ax=a^2$, $a>0$

13. $y=ax^n$, a es un parámetro.

14. $y=ae^{\sigma x}$, $\sigma=$ cont.

15. $\cos y=ae^{-x}$

16. $x^2+\frac{1}{2}y^2=a^2$

17. $x^2-y^2=a^2$

18. $x^k+y^k=a^k$

19. $x^2+y^2=2ay$

20. $x^2-\frac{1}{3}y^2=a^2$

21. $\rho=a(1+\cos\varphi)$

22. $y^2=4(x-a)$

GRUPO 08. Integrar las siguientes ecuaciones.

01. $(y-y^3)dx+(2xy^2-x-ay^2)dy=0$

02. $y'=(x-y)^2+1$

03. $x\,\text{sen}\,x\cdot y'+(\text{sen}\,x-x\cos x)y=\text{sen}\,x\cos x-x$

04. $\frac{dy}{dx}+y\cos x=y^n\text{sen}\,2x$, $n\neq 1$

05. $(x^3-3xy^2)dx+(y^3-3x^2y)dy=0$

06. $(5xy-4y^2-6x^2)dx+(y^2-8xy+2{,}5x^2)dy=0$

07. $(3xy^2-x^2)dx+(3x^2y-6y^2-1)dy=0$

08. $(y-xy^2\ln x)dx+x\,dy=0$, $\mu=\varphi(x\cdot y)$

09. $(2xye^{x^2}-x\,\text{sen}\,x)dx+e^{x^2}dy=0$

10. $2y'+y^2+\frac{1}{x^2}=0$

11. $y'=\frac{1}{2x-y^2}$

12. $x^2+xy'=3x+y'$

13. $4x^3y^2dx+(x^4y-2x^4y-1)dy=0$

14. $xyy'-y^2=x^4$

15. $\frac{dx}{x^2-xy+y^2}=\frac{dy}{2y^2-xy}$

16. $(2x-1)y'-2y=\frac{1-4x}{x^2}$

17. $(x-y+3)dx+(3x+y+1)dy=0$

18. $y'+\cos\frac{x+y}{2}=\cos\frac{x-y}{2}$

19. $y'(3x^2-2x)-y(6x-2)+\frac{2}{x}(9x-4)=0$

20. $xy^2y'-y^3=\frac{1}{3}x^4$

21. $y'=tg^2(ax+by+c)$, $b\neq a$, $ab>0$

22. $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$, $y\big|_{x=1}=1$

23. $(x^2+y^2)dx-xy\,dy=0$

24. $(x-y+2)dx+(x-y+3)dy=0$

25. $(xy^2+y)dx-x\,dy=0$

26. $(x^2+y^2+2x)dx+2y\,dy=0$

27. $(x-1)(y^2-y+1)dx=(y+1)(x^2+x+1)dy$

28. $(x-2xy-y^2)y'+y^2=0$

29. $y\cos x\,dx+(2y-\text{sen}\,x)dy=0$

30. $y'-1=e^{x+2y}$

31. $2(x^5+2x^3y-y^2x)dx+(y^2+2x^2y-x^4)dy=0$

32. $x^2y^ny'=2xy'-y$, $n\neq -2$

33. $(\sqrt{1+x^2}+ny)dx+(\sqrt{1+y^2}+nx)dy=0$, $y\big|_{x=0}=n$

34. $[3(x+y)+a^2]y'=4(x+y)+b^2$

35. $axyy'^2 + (x^2 - ay^2 - b)y' - xy = 0$ (la sustitución $x^2 = s$, $y^2 = t$)

36. $(x - y^2)dx + 2xy\,dy = 0$

GRUPO 09.

Demostrar en los siguientes ejercicios que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones indicadas.

01. $y = e^{-x}(3\cos x - 2\operatorname{sen} x)$, $y'' + 2y' + 2y = 0$

02. $y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 sen\, 2x)$, $y'' - 4y' + 8y = 0$

03. $y = x(\operatorname{sen} x - \cos x)$, $y'' + y = 2(\cos x + \operatorname{sen} x)$

04. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}$, $y'' + 6y' + 9y = 0$

05. $y = x^2 \ln x$, $xy''' = 2$

06. $x = y^2 + y$, $y'y''' = 3y''^2$

07. $x + C = e^{-y}$, $y'' = y'^2$

08. $x = y + \ln y$, $yy'' + y'^3 - y'^2 = 0$

09. $y = C_1 + C_2 \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$, $xy'' + (1 - x)y' = 0$

10. $y = C_1 x + C_2 x \int_x^2 \frac{e^t}{t} dt \; (x > 0)$, $x^2 y'' - (x^2 + x)y' + (x + 1)y = 0$

11. $y = C_1 \ln x + C_2 \ln x \int_x^e \frac{dt}{\ln t} (x > 1)$, $x^2 \ln^2 x \cdot y'' - x \ln x \cdot y' + (\ln x + 1)y = 0$

12. $\left.\begin{array}{l} x = t(2\ln t - 1) + C_1 \\ y = t^2 \ln t + C_2 \end{array}\right\}$, $y''(1 + 2\ln y') = 1$

13. $\left.\begin{array}{l} x = (t + 1)e^t + C_1 \\ y = t^2 e^t + C_2 \end{array}\right\}$, $y'' e^{y'} (y' + 2) = 1$

14. $\left.\begin{array}{l} x = C_2 + C_1\left(t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) \\ y = 1 - C_1 \operatorname{sen}^2 t \end{array}\right\}$, $2(1 - y)y'' = 1 + y'^2$

15. $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\ln t+\frac{3}{4t^2} \\ y=\frac{1}{4}t+\frac{3}{4t^3} \end{array}\right\}$, $y''^2-2y'y''+3=0$

Verificar que las funciones dadas son las soluciones generales de las ecuaciones correspondientes:

16. $y=C_1\operatorname{sen}x+C_2\cos x$, $y''+y=0$

17. $y=\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})$, $xy''+2y'-xy=0$

18. $y=C_1x+C_2\ln x$, $x^2(1-\ln x)y''+xy'-y=0$

19. $y=\sqrt{(x+C_1)^2+C_2}$, $yy''+y'^2=1$

20. $x+C_2=y^3+C_1y$, $y''+6yy'^3=0$

21. $x+C_2=\ln\operatorname{sen}(y+C_1)$, $y''=y'(1+y'^2)$

22. $y=C_1x+C_2x\int_0^x\frac{\operatorname{sen}t}{t}dt$, $x\operatorname{sen}x\cdot y''-x\cos x\cdot y'+\cos x\cdot y=0$

Verificar que las relaciones dadas son integrales (generales o particulares) de las ecuaciones indicadas:

23. $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=1$, $y''=(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$

24. $y^2=1+(1-x)^2$, $y^3y''=1$

25. $\operatorname{sen}(y-C_2)=e^{x-C_1}$, $y''=y'(1+y'^2)$

26. $C_1x+C_2=\ln(C_1y-1)$, $y''=y'^2+y'$

27. $y\ln y=x+\int_0^x e^{t^2}dt$, $y(1+\ln y)y''+y'^2=2xye^{x^2}$

GRUPO 10.

Formar ecuaciones diferenciales lineales homogéneas conociendo sus ecuaciones características.

01. $\lambda^2+3\lambda+2=0$

02. $2\lambda^2-3\lambda-5=0$

03. $\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$

04. $(\lambda^2+1)^2=0$

05. $\lambda^3=0$

Formar las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas si se conocen las raíces de sus ecuaciones características y escribir sus soluciones generales.

06. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

07. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$

08. $\lambda_1 = 3-2i$, $\lambda_2 = 3+2i$

09. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$

Formar las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas si se dan sus sistemas fundamentales de soluciones.

10. e^{-x} , e^{x}

11. $1, e^{x}$

12. e^{-2x} , xe^{-2x}

13. $\operatorname{sen} 3x$, $\cos 3x$

14. $1, x$

15. e^{x} , e^{2x} , e^{3x}

16. e^{x} , xe^{x} , $x^2 e^{x}$

17. e^{x} , xe^{x} , e^{2x}

18. 1, x , e^{x}

19. 1 , $\operatorname{sen} x$, $\cos x$

20. e^{2x} , $\operatorname{sen} x$, $\cos x$

21. 1 , $e^{-x}\operatorname{sen} x$, $e^{-x}\cos x$

Integrar las siguientes ecuaciones:

22. $y'' - y = 0$

23. $3y'' - 2y' - 8y = 0$

24. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$

25. $y'' + 2y' + y = 0$

26. $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$

27. $y''' + 6y'' + 11y + 6y = 0$

28. $y'' - 2y' - 2y = 0$

29. $y^{v1} + 2y^{v} + y^{iv} = 0$

30. $4y'' - 8y' + 5y = 0$

31. $y''' - 8y = 0$

32. $y^{iv} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$

33. $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

34. $y'' - 2y' + 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

35. $y^{iv} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0$

36. $y^{v} + 4y^{iv} + 5y''' - 6y' - 4y = 0$

37. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$

38. $y''' - 2y'' + 2y' = 0$

39. $y^{iv} - y = 0$

40. $y^{x} = 0$

41. $y''' - 3y' - 2y = 0$

42. $2y''' - 3y''' + y' = 0$

GRUPO 11.

Determinar la forma de la solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea, si se conocen las raíces de su ecuación característica y el segundo miembro $f(x)$:

01. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$; $f(x) = ax^2 + bx + c$
02. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$; $f(x) = ax^2 + bx + c$
03. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$; $f(x) = ax^2 + bx + c$
04. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$; $f(x) = e^{-x}(ax + b)$
05. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$; $f(x) = e^{-x}(ax + b)$
06. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$; $f(x) = e^{-x}(ax + b)$
07. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$; $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$
08. $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$; $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$
09. $\lambda_1 = -2i$, $\lambda_2 = 2i$; $f(x) = A\operatorname{sen} 2x + B\cos 2x$
10. $\lambda_1 = -ki$, $\lambda_2 = ki$; $f(x) = A\operatorname{sen} kx + B\cos kx$
11. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$; $f(x) = e^{-x}(A\operatorname{sen} x + B\cos x)$
12. $\lambda_1 = -1-i$, $\lambda_2 = -1+i$; $f(x) = e^{-x}(A\operatorname{sen} x + B\cos x)$
13. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $f(x) = ax^2 + bx + c$
14. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$; $f(x) = ax^2 + bx + c$
15. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$; $f(x) = ax^2 + bx + c$
16. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$; $f(x) = ax^2 + bx + c$
17. $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = 1$; $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$
18. a) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$
    b) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$
    c) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$
    d) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$
    e) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$
    f) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

    $\Bigg\}$ $f(x) = ae^{-x} + be^{x}$

19. a) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$
b) $\lambda_1 = k$, $\lambda_2 = 1$
c) $\lambda_1 = \lambda_2 = k$
d) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$
e) $\lambda_1 = \lambda_2 = k$, $\lambda_3 = 1$
f) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = k$

$\Bigg\}\ f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{kx}, \quad k \neq 0,\ k \neq 1$

20. a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$
b) $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = 0$

$\Big\}\ f(x) = a\,\text{sen}\,x + b\cos x$

21. a) $\lambda_1 = 3 - 2i$, $\lambda_2 = 3 + 2i$,
$\lambda_3 = \lambda_4 = 0$
b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3 - 2i$,
$\lambda_3 = \lambda_4 = 3 + 2i$

$\Bigg\}\ f(x) = e^{3x}(\text{sen}\,2x + \cos 2x)$

Determinar la forma de la solución particular para las siguientes ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas:

22. $y'' + 3y' = 3$
23. $y'' - 7y' = (x-1)^2$
24. $y'' + 3y' = e^x$
25. $y'' + 7y' = e^{-7x}$
26. $y'' - 8y' + 16 = (1-x)e^{4x}$
27. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$
28. $4y'' - 3y' = xe^{\frac{3}{4}x}$
29. $y'' - y' - 2y = e^x + e^{-2x}$
30. $y'' - 4y' = xe^{4x}$
31. $y'' + 25y = \cos 5x$
32. $y'' + y = \text{sen}\,x - \cos x$
33. $y'' + 16y = \text{sen}(4x + \alpha)$
34. $y'' + 4y' + 8y = e^{2x}(\text{sen}\,2x + \cos 2x)$
35. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(\text{sen}\,2x - \cos 2x)$
36. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 2x$
37. $y'' + k^2 y = k\,\text{sen}(kx + \alpha)$
38. $y'' + k^2 y = k$
39. $y'' + 4y = \text{sen}\,x\,\text{sen}\,2x$
40. $y'' - 4y' = 2\cos^2 4x$
41. $y''' + y = x$
42. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 1$
43. $y''' + y' = 2$

44. $y''' + y'' = 3$

45. $y^{iv} - y = 1$

46. $y^{iv} - y' = 2$

47. $y^{iv} - y'' = 3$

48. $y^{iv} - y''' = 4$

49. $y^{iv} + 4y''' + 4y'' = 1$

50. $y^{iv} + 2y''' + y'' = e^{4x}$

51. $y^{iv} + 2y''' + y'' = e^{-x}$

52. $y^{iv} + 2y''' + y'' = xe^{-x}$

53. $y^{iv} + 4y'' + 4y = \operatorname{sen} 2x$

54. $y^{iv} + 4y'' + 4y = \cos x$

55. $y^{iv} + 4y'' + 4y = x \operatorname{sen} 2x$

56. $y^{iv} + 2n^2 y'' + n^4 y = a \operatorname{sen}(nx + \alpha)$

57. $y^{iv} - 2n^2 y'' + n^4 y = \cos(nx + \alpha)$

58. $y^{iv} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = \operatorname{sen} x$

59. $y^{iv} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = e^x$

60. $y^{iv} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = xe^x$

Resolver las siguientes ecuaciones:

61. $y'' + 2y' + y = -2$

62. $y'' + 2y' + 2 = 0$

63. $y'' + 9y - 9 = 0$

64. $y''' + y'' = 1$

65. $5y''' - 7y'' - 3 = 0$

66. $y^{iv} - 6y''' + 6 = 0$

67. $3y^{iv} + y''' = 2$

68. $y^{iv} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 1$

69. $y'' - 4y' + 4y = x^2$

70. $y'' + 8y' = 8x$

71. $y'' - 2ky' + k^2 y = e^x$, $(k \neq 1)$

72. $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$

73. $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$

74. $7y'' - y' = 14x$

75. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$

76. $y'' + 5y' + 6y = 10(1 - x)e^{-2x}$

77. $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$

78. $y'' + y' + y = (x + x^2)e^x$

79. $y'' + 4y' - 2y = 8 \operatorname{sen} 2x$

80. $y'' + y = 4x \cos x$

81. $y'' - 2my' + m^2 y = \operatorname{sen} nx$

82. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \operatorname{sen} 2x$

83. $y'' + a^2 y = 2\cos mx + 3\operatorname{sen} mx \quad (m \neq a)$

84. $y'' - y' = e^x \operatorname{sen} x$

85. $y'' + 2y' = 4e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)$

86. $y'' + 4y' + 5y = 10e^{-2x} \cos x$

87. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(2x + \operatorname{sen} 2x)$

88. $4y'' + 8y' = x \operatorname{sen} x$

89. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$

90. $y'' + y' - 2y = x^2 e^{4x}$

91. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$

92. $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$

93. $y^{iv} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x$

94. $y''-2y'+y=x^3$

95. $5y''-6y'+5y=13e^x ch x$

96. $y^{iv}+y''=x^2+x$

97. $y^{v}-y^{iv}=xe^x-1$

98. $y''+y=x^2 \operatorname{sen} x$

99. $y''+2y'+y=x^2e^{-x}\cos x$

100. $y'''-4y'=xe^{2x}+\operatorname{sen} x+x^2$

101. $y'''-y=\operatorname{sen} x$

102. $y''+2y'+2y=e^{-x}\cos x+xe^{-x}$

103. $y^{iv}-2y''+y=\cos x$

104. $y''+y=2\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x$

105. $y''+4y=x\operatorname{sen}^2 x$

106. $y^{iv}+2y'''+2y''+2y'+y=xe^x+\frac{1}{2}\cos x$

107. $y''+y'=\cos^2 x+e^x+x^2$

108. $y^{v}+4y'''=e^x+3\operatorname{sen} 2x+1$

109. $y'''-3y''+3y'-y=e^x\cos 2x$

110. $y'''-2y'+4y=e^x\cos x+x^2+\operatorname{sen} 2x$

111. $y''+y'=x^2-e^x+e^x$

112. $y''-2y'-3y=2x+e^{-x}-2e^{3x}$

113. $y''+4y=e^x+4\operatorname{sen} 2x+2\cos^2 x-1$

114. $y''+3y'+2y=6xe^{-x}(1-e^{-x})$

115. $y''+y=\cos^2 2x+\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$

116. $y''-4y'+5y=e^{2x}(\operatorname{sen} x+2\cos x)$

117. $y''-4y'+5y=1+\cos^2 x+e^{2x}$

118. $y''-2y'+2y=e^x\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$

119. $y''-3y'=1+e^x+\cos x+\operatorname{sen} x$

120. $y''-2y'+5y=e^x(1-2\operatorname{sen}^2 x)+10x+1$

121. $y''-4y'+4y=4x+\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x$

122. $y''+2y'+y=1+2\cos x+\cos 2x-\operatorname{sen} 2x$

123. $y''+y'+y+1=\operatorname{sen} x+x+x^2$

124. $y''+6y'+9y=9xe^{-3x}+1+9\operatorname{sen} x$

125. $y''+2y'+1=3\operatorname{sen} 2x+\cos x$

En los siguientes problemas se necesita hallar las soluciones particulares de las ecuaciones que cumplen las condiciones iniciales dadas:

126. $y''-5y'+6y=(12x-7)e^{-x}$, $y(0)=y'(0)=0$

127. $y''+9y=6e^{3x}$; $y(0)=y'(0)=0$

128. $y''-4y'+5y=2x^2e^x$; $y(0)=2$, $y'(0)=3$

129. $y''+6y'+9y=10\operatorname{sen} x$; $y(0)=y'(0)=0$

130. $y''+y=2\cos x$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$

131. $y''+4y=\operatorname{sen} x$; $y(0)=y'+4y=\operatorname{sen} x$; $y(0)=y'(0)=1$

132. $y''-6y'+9y=x^2-x+3$; $y(0)=\frac{4}{3}$, $y'(0)=\frac{1}{27}$

133. $y''-4y'+4y=e^{2x}$; $y(0)=2$, $y'(0)=8$

134. $y'' + 4y = 4(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$; $y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi$

135. $y'' - y' = -5e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x)$; $y(0) = -4$, $y'(0) = 5$

136. $y'' - 2y' + 2y = 4e^{x}\cos x$; $y(\pi) = \pi e^{\pi}$, $y'(\pi) = e^{\pi}$

137. $y''' - y' = -2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$

138. $y^{iv} - y = 8e^{x}$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$

139. $y''' - y = 2x$; $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$

140. $y^{iv} - y = 8e^{x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$, $y'''(0) = 6$

En los siguientes problemas se necesita hallar las soluciones particulares de las ecuaciones que cumplen en el infinito las condiciones dadas:

141. $y'' - 4y' + 5y = \operatorname{sen} x$, y es acotada para $x \to +\infty$

142. $y'' + 2y' + 5y = 4\cos 2x + \operatorname{sen} 2x$, y es acotada para $x \to -\infty$

143. $y'' - y = 1$, y es acotada para $x \to \infty$

144. $y'' - y = -2\cos x$, y es acotada para $x \to \infty$

145. $y'' - 2y' + y = 4e^{-x}$, $y \to 0$ para $x \to +\infty$

146. $y'' + 4y' + 3y = 8e^{x} + 9$, $y \to 3$ para $x \to -\infty$

147. $y'' - y' - 5y = 1$, $y \to -\frac{1}{5}$ para $x \to \infty$

148. $y'' + 4y' + 4y = 2e^{x}(\operatorname{sen} x + 7\cos x)$, $y \to \infty$

149. $y'' + 4y' + 4y = 2e^{x}(\operatorname{sen} x + 7\cos x)$, $y \to 0$ para $x \to -\infty$

150. $y'' - 5y' + 6y = 2e^{-2x}(9\operatorname{sen} 2x + 4\cos 2x)$, $y \to 0$ para $x \to +\infty$

151. $y'' - 4y' + 4y = (9x^2 + 5x - 12)e^{-x}$, $y \to 0$ para $x \to +\infty$

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

RESPUESTAS GRUPO 02.

01. $x+y+C(1-xy)$
02. $x^2(1+y^2)=C$
03. $(x+y)(x-y-2)+2\ln\left|\frac{1+x}{1-y}\right|=C$
04. $y=\operatorname{tg}\ln Cx$
05. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$
06. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=1;\quad y=1$
07. $e^x=C(1-e^{-y})$
08. $y=1$
09. $a^x+a^{-y}=C$
10. $1+e^y=C(1+x^2)$
11. $(1+y)e^{-y}=\ln\frac{1+e^x}{2}+1-x$
12. $\frac{1}{2}e^{2x}-e^y-\ln\sqrt{1+y^2}-\operatorname{arctg}y=C$
13. $(x^2-2x+2)(y^2+1)e^{2\operatorname{arctg}y}=C$
14. $x+C=\operatorname{ctg}\left(\frac{y-x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$
15. $b(ax+by+C)+a=Ce^{bx}$
16. $x+y=a\operatorname{tg}\left(C+\frac{y}{a}\right)$
17. $C+\frac{e^y}{y}=\ln|\ln x|$
18. $\ln\frac{\sqrt{1+y^2}}{|y+\sqrt{1+y^2}|}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$
19. $2x^3y^3=3a^2x^2+C$
20. $\frac{1}{1-xy}+\frac{1}{2}\ln x=C$
21. $Cy^2=e^{xy-\frac{1}{xy}}$
22. $3x^2-12x+2x^3y^3+6xy=C$
23. $\frac{x^3}{3}-x^2+2x+\frac{y^3}{3x^3}-\frac{4y}{x}=C$
24. $x=\frac{(x+y)^{n-m+1}}{n-m+1}+\frac{(x+y)^{p-m+1}}{p-m+1}+C$
 $(n-m\neq-1,\ p-m\neq-1)$
25. $y^3=Cx-\ln x-1$
26. $2x^2+(2x\ln y+1)^2=C;\ x=0$
27. $y=a+\frac{Cx}{ax+1}$
28. $y=a\cdot\operatorname{tg}\sqrt{\frac{a}{x}-1}$
29. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right|=C-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}$

REPUESTAS DEL GRUPO 03

01. $y=\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{x}\right)+5\pi$
02. $y=\operatorname{arcctg}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{3}\right)+3\pi$
03. $y=2\operatorname{arctg}\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)+\frac{9}{2}\pi$
04. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}x\right)+\frac{7}{2}\pi$
05. $y=0$
06. $y=1$
07. $y=-\pi$
08. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{2x}+\frac{9}{4}\pi$

RESPUESTAS DEL GRUPO 04.

01. $y^2-3xy+2x^2=C$
02. $2Cy=C^2x^2+1;\quad y=\pm x$
03. $(x+y)x^3+y^3=C$

04. $(y-x)^8(y-2x)^9 = C(y+2x)^5$

05. $C(y^2-x^2)=y^3$

06. $y^2 = Cxe^{\frac{x^2}{y^2}}$

07. $y+\sqrt{y^2-x^2} = Cx^3 e^{\frac{y(y+\sqrt{y^2-x^2})}{x^2}}$

08. $f\,y^3+3cxy^2+3bx^2y+ax^3 = C$

09. $x^2 = y^4 + Cy^6$

10. $y^2 = x\ln Cy^2$

11. $C^2x^2 = 1+2Cy$; $C^2 - x^2 = 2Cy$

12. $(x-1)(3x+2y-1)=C$

13. $x+y+1 = Ce^{\frac{2x+y}{3}}$

14. $(x+y-1)^5(x-y-1)^2 = C$

15. $\sqrt{x^2y^4+1} = Cy^2x^2-1$

16. $y(x^2y-1)^2 = C$

17. $\operatorname{arc\,tg}\frac{y^3}{x} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^6)+\ln C$

18. $x^2(x^2y+\sqrt{1+x^4y^2}) = C$

19. $(y-2x+3)^3 = C(y-x+1)^2$

20. $x+3y-\ln|x-2y| = C$

21. $y = 1-x+Ce^{\frac{2x+2}{x+y-1}}$

22. $(x+y-1)^2+2x = C$

23. $\operatorname{sen}x + 2y\ln|y| - Cy = 0$

24. $x = Ce^{-\operatorname{sen}\frac{y}{x}}$

25. $C\sqrt{x^2+y^2} = y^2+2x^2$

26. $ye^{\sqrt{\frac{x}{y}}} = C$; $x=0$

27. $x^2+y^2 = Cx$

28. $y = \frac{1}{2}\left(Cx^{1-k} - \frac{1}{C}x^{1+k}\right)$

29. Parábola $y^2 = 2Cx + C^2$

30. $y = \frac{1}{2}\left(Cx^2 - \frac{1}{C}\right)$

31. $x^2+y^2 = Cx^4$

RESPUESTAS DE GRUPO 05.

01. $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{4}(2x^2+2x-1)$

02. $y = C\sqrt{x^2+2x-1} + x$

03. $y = \ln x + x^3$

04. $y = C\sqrt{|a^2-x^2|} + x$

05. $y = C\sqrt{x} + x^2$

06. $y = C(x+1)^2 + \frac{1}{2}(x+1)^4$

07. $x = 8\operatorname{sen}^2\frac{y}{2} + Ce^{-\cos y}$

08. $y = (x^2+C)e^{x^2}$

09. $y = \frac{Cx}{x^3+1} + \frac{1}{x}$

10. $y = 2e^{-\operatorname{sen}x} + \operatorname{sen}x - 1$

11. $y = Cx\ln x + \sqrt{x}$

12. $y^3 = Cx^2 + x^3$

13. $y^4 = C\sqrt{x} + \sqrt{x+1}$

14. $\frac{1}{x} = 2 - y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}$

15. $y = e^{x+x^2} + Ce^x$

16. $y = -x\cos x + Cx$

17. $\frac{1}{y} = Ce^{x^2} + \frac{1}{x}$

18. $x^2+y^2-a^2 = Cy$

19. $\frac{1}{y^2} = C \operatorname{sen} x + x$

20. $x^3 = Ce^y - y - 2$

21. $\frac{1}{y} = C\sqrt{x^2+x+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$

22. $y^3 = \frac{Cx}{x^2 - a^2} + x^2$

23. $\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(C - \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln|\sqrt{1+x^2}+x|\right)$

24. $\frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}(x+1)^4 + C(x+1)^2$

25. $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = C$

26. $x = y\ln y + \frac{C}{y}$

27. $y = \frac{Cx}{x-1} + x^2$

28. $y = \frac{x}{\cos x}$

29. $\operatorname{sen} y = x + Ce^{-x}$

30. $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = Ce^{-x} - x + 1$

31. $y = (x+1)^n (C + e^x)$

32. $\varphi(x) = Cx^{-\frac{n-1}{n}}$

33. $\operatorname{tg} y = \left(C + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x^2}$

34. $y = \operatorname{sen} x$

35. $y = \cos\sqrt{x}$

36. $y = 2^{\operatorname{sen} x}$

37. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

38. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

39. $y = \operatorname{arc\,tg} x$

40. $y = e^{ex} + \cos\frac{1}{x}$

41. $y = x^{-x}$

RESPUESTAS DE GRUPO 06.

01. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = C$

02. $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$

03. $\sqrt{x^2+y^2} + \ln|xy| + \frac{x}{y} = C$

04. $x^3 \operatorname{tg} y + y^4 + \frac{y^3}{x^2} = C$

05. $x^3y + x^2 - y^2 = Cxy$

06. $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{y} + \frac{x^2+y^2}{2} = C$

07. $x^3 + y^3 - x^2 - xy + y^2 = C$

08. $y\sqrt{1+x^2} + x^2y - y\ln|x| = C$

09. $\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x} = C$

10. $x \operatorname{sen} y - y\cos x + \ln|xy| = C$

11. $\operatorname{tg} xy - \cos x - \cos y = C$

12. $y = x$

13. $\operatorname{sen}(nx+my) + \cos(mx+ny) = C$

14. $\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{y} + e^{\frac{x}{y}} = C$

15. $\operatorname{sen}\frac{y}{x} - \cos\frac{x}{y} + x - \frac{1}{y} = C$

16. $(x^2+y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = C$

17. $1 + y^2 - x^2 = Cx$. $\mu_1 = \frac{1}{(1+y^2-x^2)^2}$;

$\mu_1 = \frac{1}{x^2}$

18. $xy^2 - 2x^2y - 2 = Cx$

19. $xy'(x^2+y^2) = C$

20. $\frac{y-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = C$; $\mu = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

21. $x - \frac{y}{x} = C$; $\mu = \frac{1}{x^2}$

22. $x\ln|x| - y^2 = Cx$; $\mu = \frac{1}{x^2}$

23. $5\operatorname{arctg} x + 2xy = C$; $x = 0$;
$\mu = \frac{1}{1+x^2}$

24. $y^3 + x^3(\ln x - 1) = Cx^2$; $\mu = \frac{1}{x^4}$

25. $2e^x \operatorname{sen} y + 2e^x(x-1) + e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) = C$;
$\mu = e^x$

26. $x^2 - \frac{7}{y} + 3xy = C$; $\mu = \frac{1}{y^2}$

27. $(x+y^2)^2 C = x - y^2$; $\mu = \frac{1}{(x+y^2)^3}$

RESPUESTAS DEL GRUPO 07.

01. $y + xy' = 0$
02. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$
03. $xy' = y\ln y'$
04. $y'^2 + y' - xy' + y = 0$
05. $y'' - 2y' + y = 0$
06. $yy'^2 + 2xy' - y = 0$
07. $y''' = 0$
08. $y''' + \frac{3}{x}y'' = 0$
09. $y''^2 = (1+y'^2)^3$
10. $y'' - y = 0$
11. $y'' + y = 0$
12. $y^2 - 2bx = b^2$, $(b > 0)$
13. $x^2 + ny^2 = C$
14. $2x + ay^2 = C$
15. $\operatorname{sen} y = be^{-x}$
16. $y^2 = 2bx$
17. $xy = C$
18. $y = ax$, si $k = 2$;
$\frac{1}{x^{k-2}} - \frac{1}{y^{k-2}} = \frac{1}{b^{k-2}}$, $k \neq 2$
19. $x^2 + y^2 = 2bx$
20. $xy^3 = b$
21. $\rho = C(1 - \cos\varphi)$
22. $y = Ce^{-\frac{x}{2}}$

RESPUESTAS DEL GRUPO 08.

01. $y = ay^2 + Cy\sqrt{1-y^2}$
02. $y = x - \frac{x}{x+C}$
03. $y = C\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x$
04. $y^{1-n} = 2\operatorname{sen} x + \frac{2}{n-1} + Ce^{(n-1)\operatorname{sen} x}$
05. $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = C$
06. $15x^2y - 24xy^2 - 12x^3 + 2y^3 = C$
07. $6y + 12y^3 - 9x^2y^2 + 2x^3 = C$
08. $2 + xy\ln^2 x = Cxy$; $\mu = \frac{1}{x^2y^2}$
09. $y = Ce^{-x^2} + (\operatorname{sen} x - x\cos x)e^{-x^2}$
10. $(C - \ln|x|)(1 - xy) = 2$
11. $x = Ce^{2y} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}$
12. $y + C = 2x - \frac{x^2}{2} + 2\ln\times|1-x|$
13. $x^4 = Cy^2e^{\frac{1}{y}} + 2y^2 + 2y + 1$
14. $y^2 = Cx^2 + x^4$
15. $y(y-2x)^3 = C(y-x)^2$
16. $y = C(2x-1) + \frac{1}{x}$
17. $x + y - 1 = Ce^{\frac{2x+2}{x+y-1}}$

18. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right| = C - 2\cos\frac{x}{2}$

19. $y = C(3x^2 - 2x) + \frac{2}{x}$

20. $y^3 = Cx^3 + x^4$

21. $x + C = \frac{1}{a-b}\left\{ax + by + c - \sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{b}{a}}tg(ax+by)+c\right]\right\}$

22. $x + ye^{\frac{x}{y}} = 1 + e$

23. $\ln|x| - \frac{y^2}{2x^2} = C$

24. $\ln|2x - 2y + 5| - 2(x + y - 2) = C$

25. $x^2y + 2x = Cy$

26. $x^2 + y^2 = Ce^{-x}$

27. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{y^2-y+1} - \sqrt{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right) = C$

28. $x = y^2(1 + Ce^{\frac{1}{y}})$

29. $\operatorname{sen} x + 2y\ln|y| - Cy = 0$

30. $3e^{-2y} = Ce^{-2x} - 2e^x$

31. $x^4 + y^2 = C(x^2 + y)$

32. $\frac{1}{x} = \frac{C}{y^2} + \frac{y^n}{n+2}, \quad n \neq -2$

33. $x\sqrt{1+x^2} + y\sqrt{1+y^2} + \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + \ln|y + \sqrt{1+y^2}| = n\sqrt{1+n^2} + \ln|n + \sqrt{1+n^2}|$

34. $\frac{3}{7}y - \frac{4}{7}x + \frac{1}{49}(4a^2 - 3b^2)\ln|7(x+y) + a^2 + b^2| = C$

35. $y^2 - Cx^2 = -\frac{bC}{1+aC}$

36. $xe^{\frac{y^2}{x}} = C$

RESPUESTAS DEL GRUPO 10.

01. $y'' + 3y' + 2y = 0$

02. $2y'' - 3y' - 5y = 0$

03. $y''' + 3y'' + 2y' = 0$

04. $y^{iv} + 2y'' + 2y = 0$

05. $y''' = 0$

06. $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

07. $y'' - 2y' + y = 0$, $y = C_1e^x + C_2xe^x$

08. $y'' - 6y' + 13y = 0$, $y = e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\operatorname{sen} 2x)$

09. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x$

10. $y'' - y = 0$

11. $y'' - y' = 0$

12. $y'' + 4y' + 4y = 0$

13. $y'' + 9y = 0$

14. $y'' = 0$

15. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

16. $y''' - 3y'' + 3y - y = 0$

17. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$

18. $y''' - y'' = 0$

19. $y''' + y' = 0$

20. $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$

21. $y''' + 2y'' + 2y' = 0$

22. $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$

23. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-\frac{4}{3}x}$

24. $y = e^{x}(1+x)$

25. $y = e^{-x}(C_1x + C_2)$

26. $y = 4e^{x} + 2e^{3x}$

27. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}$

28. $y = C_1e^{(1-\sqrt{3})x} + C_2e^{(1+\sqrt{3})x}$

29. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 +$
$e^{-x}(C_5 + C_6x)$

30. $y = e^{x}\left(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\text{sen}\,\frac{x}{2}\right)$

31. $y = C_1e^{2x} + e^{-x} \times$
$(C_2\cos\sqrt{3}x + C_3\text{sen}\sqrt{x})$

32. $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} +$
$(C_3\cos 2x + C_4\text{sen}\,2x)e^{-x}$

33. $y = e^{x}\text{sen}\,x$

34. $y = e^{x} \times (\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}\text{sen}\sqrt{2}x)$

35. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + e^{-x} \times$
$(C_3\cos 2x + C_4\text{sen}\,2x)$

36. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-2x} +$
$(C_3 + C_4\cos x + C_5\text{sen}\,x)e^{-x}$

37. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x}$

38. $y = C_1 + C_2e^{x}\cos x + C_3e^{x}\text{sen}\,x$

39. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3\cos x + C_4\text{sen}\,x$

40. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_{10}x^9$

41. $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3e^{2x}$

42. $y = C_1 + C_2e^{x} + C_3e^{\frac{x}{2}}$

RESPUESTAS DEL GRUPO 11.

01. $y_p = A_1x^2 + A_2x + A_2$

02. $y_p = A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x$

03. $y_p = A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2$

04. $y_p = (A_1x + A_2)e^{-x}$

05. $y_p = (A_1x^2 + A_2x)e^{-x}$

06. $y_p = (A_1x^3 + A_2x)e^{-x}$

07. $y_p = A\,\text{sen}\,x + B\cos x$

08. $y_p = x(A(\text{sen}\,x + B\cos x)$

09. $y_p = x(A_1\text{sen}\,2x + B_1\cos 2x)$

10. $y_p = x(A_1\text{sen}\,kx + B_1\cos kx)$

11. $y_p = (A_1\text{sen}\,x + B_1\cos x)e^{-x}$

12. $y_p = x(A_1\text{sen}\,x + B_1\cos x)e^{-x}$

13. $y_p = A_1x^2 + A_2x + A_3$

14. $y_p = A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x$

15. $y_p = A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2$

16. $y_p = A_1x^5 + A_2x^4 + A_3x^3$

17. $y_p = (A_1\text{sen}\,x + B_1\cos x)x$

18. a) $y_p = x(A_1e^{-x} + A_2e^{x})$

b) $y_p = A_1e^{-x} + A_2e^{x}$

c) $y_p = A_1x^2e^{-x} + A_2xe^{x}$

d) $y_p = A_1x^3e^{-x} + A_2e^{x}$

e) $y_p = A_1xe^{-x} + A_2x^2e^{x}$

f) $y_p = A_1e^{-x} + A_2x^3e^{x}$

19. a) $y_p = (A_1x^2 + A_2x + A_3)e^{kx}$

b) $y_p = (A_1x^3 + A_1x^2 + A_3x)e^{kx}$

c) $y_p = (A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2)e^{kx}$

d) $y_p = (A_1x^2 + A_2x + A_3)e^{kx}$

e) $y_p = (A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2)e^{kx}$

f) $y_p = (A_1x^4 + A_2x^4 + A_3x^3)e^{kx}$

20. a) $y_p = A\,\text{sen}\,x + B\cos x$

b) $y_p = x(A\,\text{sen}\,x + B\cos x)$

21. a) $y_p = x(A\,\text{sen}\,2x + B\cos 2x)e^{3x}$

b) $y_p = x^2(A\,\text{sen}\,2x + B\cos 2x)e^{3x}$

22. $y_p = Ax$

23. $y_p = A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x$

24. $y_p = Ae^x$

25. $y_p = Axe^{-7x}$

26. $y_p = (A_1x^3 + A_2x^2)e^{4x}$

27. $y_p = Ax^2e^{5x}$

28. $y_p = (A_1x^2 + A_2x)e^{\frac{3}{4}x}$

29. $y_p = A_1e^x + A_2e^{-2x}$

30. $y_p = (A_1x^2 + A_2x)e^{4x}$

31. $y = x(A\cos 5x + B\,\text{sen}\,5x)$

32. $y_p = x(A\cos x + B\,\text{sen}\,x)$

33. $y_p = x(A\cos 4x + B\,\text{sen}\,4x)$

34. $y_p = (A\cos 2x + B\,\text{sen}\,2x)e^{2x}$

35. $y_p = x(A\cos 2x + B\,\text{sen}\,2x)e^{2x}$

36. $y_p = x(A\cos 2x + B\,\text{sen}\,2x)e^{-3x}$

37. $y_p = x(A\,\text{sen}\,kx + B\cos kx)$

38. $y_p = A(A = \text{const})$

39. $y_p = A_1\cos x + B_1\text{sen}\,x + A_2\cos 3x + B_2\text{sen}\,3x$

40. $y_p = A_1x + A_2\cos 8x + B_2\text{sen}\,8x$

41. $y_p = A_1x + A_2$

42. $y_p = A(A = \text{const})$

43. $y_p = Ax$

44. $y_p = Ax^2$

45. $y_p = A(A = \text{const})$

46. $y_p = Ax$

47. $y_p = Ax^2$

48. $y_p = Ax^3$

49. $y_p = Ax^2$

50. $y_p = Ae^{4x}$

51. $y_p = Ax^2e^{-x}$

52. $y_p = (A_1x^3 + A_2x^2)e^{-x}$

53. $y_p = A\,\text{sen}\,2x + B\cos 2x$

54. $y_p = A\,\text{sen}\,x + B\cos x$

55. $y_p = (A_1x + A_2)\text{sen}\,2x + (B_1x + B_2)\cos 2x$

56. $y_p = x^2(A\,\text{sen}\,nx + B\cos nx)$

57. $y_p = A\,\text{sen}\,nx + B\cos nx$

58. $y_p = A\,\text{sen}\,x + B\cos x$

59. $y_p = Ax^4e^x$

60. $y_p = (Ax^5 + Bx^4)e^x$

61. $y = (C_1 + C_2)e^{-x} - 2$

62. $y = C_1 + C_2e^{-2x} - x$

63. $y = C_1 \operatorname{sen} 3x + C_2\ 3x + 1$

64. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$

65. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\frac{7}{5}x} - \frac{3}{14}x^2$

66. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{6x} + \frac{1}{6}x^3$

67. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-\frac{x}{3}} + \frac{x^3}{3}$

68. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + (C_3 + C_4 x)e^x + 1$

69. $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$

70. $y = C_1 + C_2 e^{-8x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{8}$

71. $y = (C_1 + C_2 x)e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2}$

72. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + 4x^2 e^{-2x}$

73. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} - \frac{9}{2}xe^{-3x}$

74. $y = C_1 + C_2 e^{\frac{x}{7}} - 7x^2 - 98x$

75. $y = C_1 + C_2 e^{-3x} - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right)e^{-3x}$

76. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + (20x - 5x^2)e^{-2x}$

77. $y = e^{-x}(C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x) + \frac{x}{2}$

78. $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}\right)e^x$

79. $y = C_1 e^{-(\sqrt{6}+2)x} + C_2 e^{(\sqrt{6}-2)x} - \frac{12 \operatorname{sen} 2x + 16 \cos 2x}{25}$

80. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x^2 \operatorname{sen} x + x \cos x$

81. $y = (C_1 + C_2 x)e^{mx} + \frac{(m^2 - n^2)\operatorname{sen} nx + 2mn \cos nx}{(m^2 + n^2)^2}$

82. $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x) - \frac{1}{4}xe^{-x} \cos 2x$

83. $y = C_1 \cos ax + C_2 \operatorname{sen} ax + \frac{2 \cos mx + 3 \operatorname{sen} mx}{a^2 - m^2}$; $(m \neq a)$

84. $y = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$

85. $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{5}e^x(6 \operatorname{sen} x - 2 \cos x)$

86. $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) + 5xe^{-2x} \operatorname{sen} x$

87. $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x) - \frac{1}{4}xe^{-x} \cos 2x + \frac{x}{2}e^{-x}$

88. $y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \left(\frac{x}{20} - \frac{7}{50}\right)\operatorname{sen} x - \left(\frac{x}{10} + \frac{1}{50}\right)\cos x$

89. $y = C_1 e^{2x} + \left(C_2 - x - \frac{x^2}{2}\right)e^x$

90. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{e^{4x}}{18}\left(x^2 - x + \frac{7}{18}\right)$

91. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{e^{3x}}{2}(x^2 - 2x + 2)$

92. $y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x - x^2 - 3x - 1$

93. $y = C_1 e^x + C_2 xe^x + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x + \frac{x^2}{4}e^x$

94. $y = (C_1 + C_2 x)e^x + x^3 + 6x^2 + 18x + 24$

95. $y=e^{\frac{3}{5}x}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x+C_2\text{sen}\,\frac{4}{5}x\right)+\frac{e^{2x}}{2}+1,3$

96. $y=C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4\text{sen}\,x+\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}-x^2$

97. $y=\frac{x^4}{24}+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4+\left(\frac{x^2}{2}-4x+C_5\right)e^x$

98. $y=\left(C_1+\frac{x}{4}-\frac{x^3}{6}\right)\cos x+\left(C_2+\frac{x^2}{4}\right)\text{sen}\,x$

99. $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+e^{-x}(-x^2\cos x+4x\,\text{sen}\,x+6\cos x)$

100. $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}+\frac{1}{5}\cos x-\frac{x^3}{12}-\frac{x}{8}+\frac{e^{2x}}{32}(2x^2-3x)$

101. $y=C_1e^{x}+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\text{sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{2}(\cos x-\text{sen}\,x)$

102. $y=\frac{x}{2}e^{-x}\text{sen}\,x+xe^{-x}+e^{-x}(C_1\cos x+C_2\text{sen}\,x)$

103. $y=\frac{1}{4}\cos x+(C_1+C_2x)e^x+(C_3+C_4x)e^{-x}$

104. $y=\frac{1}{2}x\,\text{sen}\,x+\frac{1}{8}\cos 3x+C_1\cos x+C_2\text{sen}\,x$

105. $y=C_1\cos 2x+C_2\text{sen}\,2x+\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}x\cos 2x-\frac{1}{16}x^2\text{sen}\,2x$

106. $y=\left(\frac{x}{8}-\frac{1}{4}\right)e^x+(C_1+C_2x)e^{-x}+\left(C_3-\frac{x}{8}\right)\cos x+C_4\text{sen}\,x$

107. $y=C_1+C_2e^{-x}+\left(\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right)+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{20}\text{sen}\,2x-\frac{1}{10}\cos 2x$

108. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\cos 2x+C_5\,\text{sen}\,2x+\frac{1}{5}e^x+\frac{1}{24}x^3+\frac{3}{32}x\,\text{sen}\,2x$

109. $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x-\frac{1}{8}e^x\text{sen}\,2x$

110. $y=C_1e^{-2x}+(C_2\cos x+C_3\text{sen}\,x)e^x+\frac{1}{8}(2x^2+2x+1)+\frac{1}{40}(\text{sen}\,2x+3\cos 2x)+\frac{1}{20}xe^x(3\,\text{sen}\,x-\cos x)$

111. $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{3}x^3-x^2+2x+xe^{-x}+\frac{1}{2}x$

112. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{1}{4}xe^{-x}-\frac{1}{2}xe^{3x}$

113. $y=C_1\cos 2x+C_2\text{sen}\,2x+\frac{1}{5}e^x+x\left(\frac{1}{4}\text{sen}\,2x-\cos 2x\right)$

114. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+3(x^2-2x)e^{-x}+3(x^2+2x)e^{-2x}$

115. $y=C_1\cos x+C_2\text{sen}\,x+1-\frac{1}{3}\cos 4x-\frac{1}{4}x\,\text{sen}\,x$

116. $y=\left(C_1\cos x+C_2\text{sen}\,x-\frac{x}{2}\cos x+x\,\text{sen}\,x\right)e^{2x}$

117. $y=(C_1\cos x+C_2\text{sen}\,x+1)e^{2x}+\frac{3}{10}+\frac{1}{130}\cos 2x-\frac{4}{65}\text{sen}\,2x$

118. $y=\left(C_1\cos x+C_2\operatorname{sen}x+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x\operatorname{sen}x\right)e^x$

119. $y=C_1+C_2e^{3x}-\frac{x}{3}-\frac{1}{2}e^x+\frac{\cos x-2\operatorname{sen}x}{5}$

120. $y=\left(C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen}2x+\frac{x}{4}\operatorname{sen}2x\right)e^x+2x+1$

121. $y=(C_1+C_2x)e^x+x+1+\frac{1}{25}(4\cos x+3\operatorname{sen}x)+\frac{1}{8}\cos 2x$

122. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+1+\operatorname{sen}x+\frac{\cos 2x+7\operatorname{sen}2x}{25}$

123. $y=\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}+x^2-x-2-\cos x$

124. $y=(C_1+C_2x)e^{-3x}+\frac{1}{9}+\frac{3}{2}x^3e^{-3x}+\frac{1}{50}(36\operatorname{sen}x-27\cos x)$

125. $y=C_1+C_2e^{-2x}-\frac{x}{2}-\frac{1}{5}\cos x+\frac{2}{5}\operatorname{sen}x-\frac{3}{8}(\operatorname{sen}2x+\cos 2x)$

126. $y=e^{2x}-e^{3x}+xe^{-x}$

127. $y=-\frac{1}{3}(\cos 3x+\operatorname{sen}3x-e^{3x})$

128. $y=e^{2x}(\cos x-2\operatorname{sen}x)+(x+1)^2e^x$

129. $y=\left(x+\frac{3}{5}\right)e^{-3x}+\frac{1}{5}(4\operatorname{sen}x-3\cos x)$

130. $y=\cos x+x\operatorname{sen}x$

131. $y=\cos 2x+\frac{1}{3}(\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}x)$

132. $y=(1-3x)e^{3x}+\frac{x^2}{9}+\frac{x}{27}+\frac{1}{3}$

133. $y=(4x+2)e^{2x}+\frac{1}{2}y^2e^{2x}$

134. $y=3\pi\cos 2x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x+x(\operatorname{sen}2x-\cos 2x)$

135. $y=-4+2e^x+e^{-x}(\operatorname{sen}x-2\cos x)$

136. $y=-e^x[\pi\cos x+(\pi+1-2x)\operatorname{sen}x)]$

137. $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})+x^2$

138. $y=\cos x+2\operatorname{sen}x+e^{-x}-3e^x+2xe^x$

139. $y=-\frac{4}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x+2x$

140. $y=2xe^x$

141. $y=\frac{1}{4}\cos x$

142. $y=\operatorname{sen}2x$

143. $y=-1$

144. $y=\cos x$

145. $y=e^{-x}$

146. $y=3+e^x$

147. $y=-\frac{1}{5}$

148. $y=e^x(\operatorname{sen}x+\cos x)$

149. $y=e^{-2x}\cos 2x$

150. $y=(x^2+x)e^{-x}$

BIBLIOGRAFÍA

1. Coddington, Earl A. Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias. Compañía editorial Continental S.A. México - España - Argentina - Chile.

2. William E. Boyle, Richard C. Di Prima. Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera. Editorial Limusa. México.

3. A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Macarenko. Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Editorial Mir. Moscu.

4. Robert Borrelli. Courtney S. Coleman. Ecuaciones diferenciales, una perspectiva de modelación. Oxford University Pres. Impreso en México

5. Kaplan, Wilfred, Ordinary Diffential Ecuations. Reading, Mass. Addison - Wesley, 1958.

COLECCIÓN MOSHERA

UNIVERSITARIOS

PROGRAMACIÓN LINEAL

NÚMEROS REALES

LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

Relaciones y Funciones de R en R

MATEMÁTICA BÁSICA

GEOMETRÍA VECTORIAL EN R^3

NÚMEROS COMPLEJOS

ANÁLISIS MATEMÁTICO I LÍMITES Y CONTINUIDAD

VECTORES EN R^3

Cálculo Diferencial

cálculo integral y sus aplicaciones

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

ANÁLISIS MATEMÁTICO III

ANÁLISIS MATEMÁTICO IV

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO EUCLIDEANO R^3

SUCESIONES Y SERIES

ÁLGEBRA LINEAL

SERIES DE FOURIER

INFERENCIA ESTADÍSTICA

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS TOMO 1

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS TOMO 2

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS TOMO 3

TÓPICOS DE CÁLCULO DE PROBABILIDADES PARTE: I

TÓPICOS DE CÁLCULO DE PROBABILIDADES PARTE: II

TÓPICOS DE CÁLCULO DE PROBABILIDADES PARTE: III

TÓPICOS DE CÁLCULO DE PROBABILIDADES PARTE: IV

CENTRO DE DIVULGACIÓN DE MATEMÁTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES

MATEMÁTICA BÁSICA

ÁLGEBRA FUNDAMENTAL

ÁLGEBRA LINEAL

NOTAS DE ÁLGEBRA

FÍSICA I

FÍSICA II

FÍSICA III ELECTROSTÁTICA Y MAGNETISMO

ISBN: 978-9972-813-63-4

